TISAK »VJESNIK« — ZAGREB

KAKO ĆU RIJEŠITI MATEMATIČKI ZADATAK

Napisao
GEORGE POLYA
profesor Stanford univerziteta (SAD)

2. izdanje

ŠKOLSKA KNJIGA • ZAGREB 1966

Naslov originala

HOW TO SOLVE IT

A new aspect of mathematical method

Princeton University Press 1945 (I izdanje)
Objavljeno u preradenom izdanju 1957.

Urednik
JOSIP BREČEVIĆ

Preveo
MILAN KRAJNOVIĆ

Odobrio kao priručnik za škole Savjet za prosvjetu NRH rješenjem broj 373/56 od 15. VI 1956.

PREDGOVOR

Rješenje velikog problema veliko je otkriće, no i u rješavanju svakog problema ima nešto otkrivačko. I pri najskromnijem zadatku, ako on budi tvoj interes, ako pokreće tvoju dosjetljivost, i ako ga rješavaš vlastitim snagama, doživjet ćeš napetost i trijumf pronalazača. Takvi doživljaji u dobi koja je pristupačna utiscima mogu stvoriti sklonost za umni rad i utisnuti doživotni pečat na duh i karakter.

Tu je velika prilika za nastavnika matematike. Ako on u svoje raspoloživo vrijeme s učenicima samo mehanički »teše« uvježbane postupke, smanjuje im interes i koči njihov intelektualni razvoj. On tada slabo iskorištava svoju priliku. No ako on u svojim učenicima budi radoznalost dajući im zadatke koji su primjereni njihovu znanju i ako im pomaže stimulativnim pitanjima, razvijat će u njima sklonost za samostalnim mišljenjem i pokazivati im putove do njega.

Jedinstvenu priliku ima i učenik kome je u nastavnom planu matematika. Dakako da će ta prilika biti propuštena ako on u matematici vidi samo predmet u kome mora steći izvjesnu ocjenu, a inače ga nakon završenog ispita može što brže zaboraviti. Prilika može biti propuštena čak i onda kad je učenik prirodno nadaren za matematiku, jer on mora — kao i svaki drugi — najprije otkriti svoje sposobnosti i sklonosti. On ne može znati da li voli ćevapčiće, ako ih nikad nije okusio. Neka učenik dođe do zaključka da matematički problem može pružiti isto toliko zadovoljstva koliko i križaljka, ili da intenzivni umni rad može biti jednako ugodan kao napeta partija tenisa. Okusi li jednom radost u matematici, neće je lako zaboraviti, i tu je onda dobra prilika da matematika za nj nešto postane: najmilija zabava, ili oruđe njegova zvanja, ili čak velika strast.

Autor se sjeća vremena kad je sam bio student, i to ponešto ambiciozan student, koji je živo želio da nešto od matematike i fizike razumije. Pozorno je slušao predavanja, čitao knjige i pokušavao da shvati prikazana rješenja i činjenice; no bilo je jedno pitanje koje ga je neprestano uznemiravalo: »Jest, rješenje je tu, čini se da je ispravno, no kako je moguće naći takvo rješenje? Jest, ovaj eksperiment čini se da uspijeva, činjenice su tu, no kako ljudi mogu otkriti takve činjenice? A kako bih ja sam mogao nešto takva pronaći ili otkriti?« Danas autor predaje matematiku na sveučilištu. On misli, odnosno nada se da neki revniji između njegovih studenata postavljaju slična pitanja, pa pokušava udovoljiti njihovoj radoznalosti. Njegova nastojanja da ne samo shvati rješenje ovog ili onog problema već i motive i postupke u rješavanju, pa da to onda objasni drugima, dovela su ga najzad do toga da napiše ovu knjigu. On se nada da će ona koristiti nastavnicima koji žele kod svojih učenika razvijati vještinu u rješavanju zadataka i učenicima koji nastoje razviti svoje vlastite sposobnosti.

Iako se ova knjiga posebno obazire na potrebe učenika i nastavnika matematike, obraća se ona i svakom onom koga interesiraju sredstva i putovi izuma i otkrića. Takav interes je rašireniji nego što bi se u prvi mah pomislilo. Prostor što ga u popularnoj štampi zauzimaju križaljke i druge zagonetke čini se da pokazuje kako se ljudi rado bave rješavanjem i nepraktičnih problema. Iza želje za rješenjem ovog ili onog problema, koji ne donosi nikakve materijalne koristi, bit će da se krije neka dublja radoznalost i želja da se shvate sredstva i putovi, motivi i postupci rješavanja.

Naredne stranice pisane su donekle koncizno, no što je moguće jednostavnije. One se temelje na dugotrajnom i ozbiljnom proučavanju rješavačkih metoda. Ta disciplina, koju neki autori nazivaju *heuristikom*, nije danas u modi, ali ona ima dugu prošlost, a možda neku budućnost.

Proučavamo li metode rješavanja zadataka, zapazit ćemo još jedno lice matematike. Zaista, matematika ima dva lica, aspekta: ona je stroga euklidska nauka, no ona je i nešto drugo. Prikazana euklidski, matematika se pojavljuje kao sistematska deduktivna nauka, no matematika u nastajanju jest eksperimentalna induktivna nauka. Oba su aspekta stara koliko i sama matematika. Ipak je drugi aspekt u jednom pogledu nov: matematika »in statu nascendi«, u procesu iznalaženja, nije nikad prije bila prikazana — upravo u ovakvu stilu — učeniku, nastavniku ili široj javnosti.

Područje heuristike raznoliko je povezano s drugim strukama. Heuristika djelomice zasijeca u domenu matematičara, fizičara, psihologa, pedagoga, pa i filozofa. Autor vrlo dobro zna mogućnosti kritike sa suprotnih stajališta i potpuno je svjestan svojih granica, ali može ustvrditi jedno: on ima iskustva u rješavanju zadataka i u nastavi matematike na raznim stupnjevima.

Autor namjerava da ovu temu potanje obradi u većoj knjizi, koja će uskoro biti gotova.

Autoru je dužnost da zahvali svim prijateljima i kolegama koji su mu pružali pomoć i davali svakovrsne savjete kroz niz godina što ih je posvetio ovom prilično nepoznatom području. Ovdje je nemoguće nabrojiti sva imena; donekle potpun popis, koji bi ovdje ispao nerazmjerno dug, izaći će u opširnijem djelu. Ipak bi autor već ovdje zahvalio g. Datusu C. Smithu mlađem, direktoru Princeton University Pressa, i gđici Gladys Fornell, suradnici tog nakladnog poduzeća, na njihovoj efikasnoj i uviđavnoj pomoći.

G. POLYA

Stanford univerzitet (Kalifornija), 1. augusta 1944.

SADRŽAJ

I dio

U UČIONICI

Svrha tabele

Glavni dijelovi i glavna pitanja

Daljnji primjeri

II dio

KAKO RJEŠAVATI ZADATAK

III dio

MALI HEURISTIČKI LEKSIKON

SADRŽAJ

* Članci označeni zvjezdicom samo upućuju na druge članke.

UVOD

Naredna razmatranja grupiraju se oko jednoga kompleksa pitanja i preporuka. Pitanja i preporuke odštampani su u tabeli pod naslovom »Kako rješavati zadatak?« dva puta, jednom na početku, a drugi put na kraju knjige, tako da ih čitalac može brzo i lako naći. Svaka preporuka i svako pitanje, kad se u tekstu knjige citiraju, štampani su kurzivom. Čitav popis, kad ćemo se na nj pozivati, nazivat ćemo naprosto »tabela« ili »naša tabela«.

Na idućim stranicama razlaže se svrha tabele, ilustrira na primjerima njena praktična korist, objašnjavaju pojmovi i misaone operacije na kojima se ona osniva. Kao neko uvodno razjašnjenje možemo reći ovo: ako se s tim pitanjima i preporukama obratiš samom sebi i ako ih pravilno primijeniš, mogu ti ona pomoći da riješiš svoj zadatak. Obratiš li se s njima svom učeniku i pravilno ih primijeniš, možeš mu pomoći pri rješavanju njegova zadatka.

Knjiga se dijeli u tri dijela.

Naslov prvog dijela jest »U učionici«. Taj dio sadrži 20 paragrafa. Svaki se paragraf citira svojim rednim brojem, debelo odštampanim, npr. »paragraf **7**«. U paragrafima **1.** do **5.** raspravlja se općenito o svrsi tabele. U paragrafima **6.** do **17.** izlažu se glavni dijelovi i glavna pitanja tabele i diskutira se prvi praktični primjer. Paragrafi **18.** do **20.** donose daljnje primjere.

Naslov vrlo kratkog drugog dijela glasi »Kako rješavati zadatak«. Taj je dio napisan u dijaloškom obliku; zamišljeni nastavnik odgovara na kratka pitanja zamišljenog učenika.

Treći, najopširniji dio jest »Mali heuristički leksikon«. Kraće ćemo ga nazivati »leksikonom«. Taj dio sadrži 67 članaka, poredanih po abecedi. Na primjer, značenje izraza

HEURISTIKA objašnjava se u članku s istim naslovom na str. 62. Ako se na naslov članka upućuje u tekstu, upotrebljavaju se velika slova. Neki su odlomci u tim člancima više tehničkog sadržaja; oni su stavljeni u uglate zagrade. Neki su članci tijesno povezani s prvim dijelom, kome daju pobliža objašnjenja i specifične komentare. Drugi neki članci donekle premašuju cilj prvog dijela i otkrivaju mu dublju pozadinu. Ključni članak jest SUVREMENA HEURISTIKA. U njemu se objašnjava veza između glavnih članaka i plana na kome se osniva leksikon. Taj članak sadrži i upute kako se možemo obavijestiti o detaljima tabele. Izričito valja naglasiti da postoji zajednički plan i izvjesna jedinstvena linija jer članci leksikona sami po sebi pokazuju najveću vanjsku raznolikost. Nekoliko duljih članaka posvećeno je sistematskom, iako sažetom, pretresanju nekih općih tema. Drugi pak članci sadrže specifičnije komentare, a neki opet upućuju na druge članke ili donose historijske napomene, ili citate, ili aforizme, ili čak šale.

Leksikon ne valja čitati prebrzo. Njegov je tekst često zbijen, a katkad ponešto suptilan. Čitalac neka posegne za leksikonom ako se želi informirati o posebnim pitanjima. Ako ta pitanja potječu iz iskustva s vlastitim problemima ili iz rada s učenicima, mnogo su veći izgledi da će čitanje leksikona koristiti.

Već smo nekoliko puta spomenuli »učenika« i »nastavnika«. Njih ćemo neprestano spominjati. Napomenimo da »učenik« može biti student visoke škole ili srednjoškolac, ili uopće svatko tko uči matematiku. »Nastavnik« pak može biti profesor visoke škole ili srednjoškolski profesor, ili uopće svatko tko se zanima za tehniku matematičke nastave. Autor katkad gleda sa stanovišta učenika, a katkad sa stanovišta nastavnika (ovo posljednje pretežno u prvom dijelu). No najčešće (naročito u trećem dijelu) njegovo stajalište nije ni stajalište učenika ni nastavnika, već naprosto stajalište čovjeka koji ozbiljno nastoji riješiti svoj zadatak.

KAKO ĆU RIJEŠITI MATEMATIČKI ZADATAK

I DIO

U UČIONICI

SVRHA TABELE

1. Pomoć učeniku. Jedna od najvažnijih nastavnikovih dužnosti jest pomoći svojim učenicima. Taj zadatak nije sasvim lak, za nj treba vremena, prakse, predanosti i zdravih načela.

Učenik treba da se što više osamostali. No ako ga s njegovim zadatkom ostavimo samog, bez pomoći ili bez dovoljne pomoći, on možda uopće neće napredovati. Ako, naprotiv, nastavnik suviše pomaže, ne ostaje ništa samom učeniku. Nastavnik treba da pomaže, ali ni previše ni premalo. Treba da pomaže tako da učenik *sudjeluje u radu u razumnoj mjeri.*

Ako učenik sam ne može mnogo učiniti, neka mu nastavnik ostavi bar neku iluziju da radi samostalno. Da to postigne, nastavnik mora učeniku pomagati oprezno i *nenametljivo.*

Najbolje je učeniku pomagati na prirodan način. Nastavnik treba da se postavi na mjesto učenika, mora da gleda situaciju sa stajališta učenika, mora da nastoji razumjeti što se zbiva u učenikovu duhu i da mu postavlja takva pitanja ili da ga upozorava na takav postupak *koji bi učeniku samom mogao pasti na um.*

2. Pitanja, preporuke, misaone operacije. Nastoji li nastavnik da učeniku uspješno, no nenametljivo i prirodno pomogne, doći će do toga da će neprestano postavljati ista pitanja i upozoravati na iste postupke. Tako moramo pri nebrojenim zadacima pitati: *Što je nepoznato?* Isto to možemo pitati i drugim riječima: Što se zahtijeva? Što želiš naći? Što zapravo tražiš? Cilj je ovih pitanja koncentrirati učenikovu pažnju na nepoznanicu. Katkad ćemo isti efekt jednostavnije postići preporukom: *Promotri nepoznanicu!* I pitanju i preporuci namjera je ista: izazvati istu misaonu operaciju.

Autoru se činilo da je vrijedno truda sabrati i srediti pitanja i preporuke koje na tipičan način pomažu učenicima pri obrađivanju zadataka. Naša tabela sadrži pomno odabrana i poređana pitanja i preporuke te vrste. Pitanja i preporuke koriste u isti mah i onima koji se sami bave rješavanjem nekog zadatka. Ako čitalac dovoljno pozna tabelu i nakon preporuke može vidjeti radnju koja se sugerira, razabrat će da tabela indirektno nabraja *misaone operacije koje tipično pomažu pri rješavanju zadataka.* Te su misaone operacije poređane onim redom kojim se najvjerojatnije pojavljuju.

3. Općenita valjanost važna je karakteristika pitanja i preporuka sadržanih u našoj tabeli. Uzmimo, na primjer, pitanja: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet?* Ova se pitanja mogu upotrebljavati općenito, možemo ih uspješno postavljati obrađujući ma koju vrstu zadataka. Primjena ovih pitanja nije ograničena na neko određeno područje. Naš zadatak može biti bilo algebarski bilo geometrijski, matematički ili nematematički, teorijski ili praktički, ozbiljan problem ili obična zagonetka — svejedno, ta pitanja imaju smisla i mogu nam pomoći da riješimo zadatak.

Zapravo postoji jedno *ograničenje,* ali ono nema veze s područjem. Izvjesna pitanja i preporuke tabele mogu se primijeniti samo na tzv. »odredbene zadatke«, a na »dokazne zadatke« ne mogu. Pri zadacima posljednje vrste moramo postavljati drugačija pitanja; vidi ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI.

4. Zdrav razum. Preporuke i pitanja naše tabele vrijede općenito, no bez obzira na to, ona su prirodna, jednostavna, očevidna i proizlaze iz običnog zdravog razuma. Uzmimo preporuku: *Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!* Tu ti se savjetuje da učiniš ono što bi svakako učinio i sam, bez

ikakvog savjeta, ako se ozbiljno baviš svojim zadatkom. Jesi li gladan? Ako želiš nešto pojesti, pomišljaš na neki poznati način kojim ćeš doći do hrane. Imaš li pred sobom geometrijski konstruktivan zadatak? Treba li da konstruiraš trokut, podsjećaš se na neku metodu konstrukcije trokuta koja ti je već poznata. Rješavajući bilo kakav problem, želiš naći izvjesnu nepoznanicu, pa se podsjećaš na neku tebi već poznatu metodu kojom se pronalazi ova ili slična nepoznanica. Postupaš li tako, radiš upravo po preporuci iz tabele. I time si na dobrom putu; preporuka je dobra, potiče te na postupak, koji vrlo često vodi uspjehu.

Sve su preporuke i pitanja naše tabele prirodna, jednostavna i očevidna, općenito su formulirana i proizlaze iz običnog zdravog razuma. Ona pobuđuju izvjestan način rada, do koga će posve prirodno doći svatko tko se ozbiljno bavi svojim zadatkom, a ima zdrav razum. Međutim, kad netko i postupa ispravno, obično se ne brine o tom da svoje postupke izražava jasnim riječima, a ako i nastoji, možda mu uvijek ne uspijeva. Naša tabela pokušava izraziti te postupke.

5. Nastavnik i učenik. Oponašanje i vježbanje. Obraćajući se svojim učenicima pitanjem ili preporukom, nastavnik će imati pred sobom dvostruki cilj. Prvo, pomoći učeniku da spretno riješi svoj zadatak i, drugo, razvijati umne sposobnosti učenika tako da buduće zadatke može rješavati sam.

Iskustvo pokazuje da zgodno primijenjena pitanja i preporuke naše tabele mogu vrlo često pomoći učeniku. Dvije su im karakteristike zajedničke: zdrav razum i općenita valjanost. Budući da proizlaze iz običnog zdravog razuma, ona vrlo često dolaze spontano; mogu učeniku samom pasti na um. Budući da su općenita, pomažu nenametljivo; usmjeruju samo općenito i ostavljaju dovoljno posla samom učeniku.

Oba cilja što smo ih malo prije spomenuli međusobno su usko povezana: uspije li učeniku da riješi svoj zadatak, on je time i nešto povećao svoju sposobnost u rješavanju zadataka. Nadalje, ne smijemo zaboraviti da su naša pitanja zbog svoje općenitosti primjenjiva u mnogim slučajevima. Ako isto pitanje pomaže više puta, zacijelo će to zapaziti i učenik, pa će ga to potaknuti da dotično pitanje u sličnoj situaciji postavi sam. Ako on sebi to pitanje postavlja više puta, jednom će mu uspjeti da izmami ispravnu misao. Takav uspjeh otkriva mu pravi način kako treba upotrijebiti pitanje, a time on pitanje stvarno i usvaja.

Učenik može usvojiti neka pitanja naše tabele toliko da najzad bude sposoban sam sebi postaviti pravo pitanje u pravom času i izvršavati odgovarajuće misaone operacije prirodno i energično. Takav se učenik svakako u najvećoj mogućoj mjeri okoristio našom tabelom. Što može učiniti nastavnik da bi postigao taj najbolji mogući rezultat?

Rješavanje zadataka je praktična vještina kao, na primjer, plivanje. Svaku praktičnu vještinu stječemo oponašanjem i vježbanjem. Onaj tko hoće plivati mora oponašati ono što drugi čine svojim rukama i nogama da održe glavu iznad vode, a zatim uči plivati vježbajući. Onaj tko nastoji rješavati zadatke mora promatrati i oponašati ono što drugi čine kad rješavaju zadatke, a zatim uči izrađivati zadatke radeći ih.

Želi li nastavnik da kod svojih učenika razvija sposobnost rješavanja zadataka, mora kod njih pobuditi izvjestan interes za zadatke i davati im dovoljno prilike za oponašanje i vježbanje. Želi li nastavnik da kod svojih učenika razvija misaone operacije koje odgovaraju pitanjima i preporukama naše tabele, postavljat će ih učenicima toliko puta koliko god puta to može učiniti neusiljeno. Osim toga nastavnik treba, rješavajući zadatak pred razredom, svoje ideje ponešto dramatizirati i sam sebi postavljati ona pitanja koja upotrebljava kad pomaže svojim učenicima. Uz takvo vođenje učenik će otkriti kako se pravilno upotrebljavaju pitanja i preporuke i time steći nešto što je važnije od poznavanja neke specijalne matematičke činjenice.

GLAVNI DIJELOVI I GLAVNA PITANJA

6. Četiri faze rada. Pokušavamo li riješiti neki zadatak, morat ćemo više puta mijenjati stajalište s kojeg taj zadatak razmatramo. Neprestano ćemo morati zauzimati drugi po-

ložaj. U početku rada naša će predodžba o zadatku vjerojatno biti dosta nepotpuna. Čim nešto uznapredujemo, vidici nam se već mijenjaju, a opet su drugačiji kad je zadatak gotovo riješen.

Radi zgodnoga grupiranja pitanja i preporuka u našoj tabeli razlikovat ćemo u radu četiri faze. Prvo, moramo zadatak *razumjeti*, moramo jasno vidjeti, što se traži. Drugo, moramo razmotriti kako međusobno zavise razne pojedinosti, kakva je veza između nepoznanice i zadanih podataka, radi toga da bismo došli do ideje rješenja i stvorili *plan*. Treće, treba da *izvršimo* plan. Četvrto, vršimo *osvrt*, provjeravamo i diskutiramo gotovo rješenje.

Svaka od ovih faza ima svoje značenje. Može se desiti da učenik nadođe na neku izvanredno sjajnu ideju pa s rješenjem naprosto »bljesne«, preskočivši sve pripreme. Svakako da su takve sretne ideje vrlo poželjne. No može ispasti nešto vrlo nepoželjno ili nesretno ako učenik izostavi koju od četiriju faza, a nema dobre ideje. Najgore je ako se učenik upusti u izračunavanja i konstrukcije, a zadatak uopće nije *razumio*. Općenito je beskorisno provoditi pojedinosti dok nismo spoznali glavnu vezu ili načinili neki *plan*. Učenik će izbjeći mnogim pogreškama ako *kontrolira svaki korak* u izvršavanju svog plana. I najbolji uspjeh bit će oslabljen ako učenik gotovo rješenje još jednom ne preispita i ne *promozga*.

7. Razumijevanje zadatka. Smiješno je odgovarati na pitanje koje nismo razumjeli. Žalosno je raditi bez žive želje. Često se, u školi i izvan nje, događaju takve smiješne i žalosne stvari, no nastavnik treba da učini sve kako bi ih spriječio u svom razredu. Učenik treba da zadatak razumije. Ali ne samo to. Potrebno je da on i teži k njegovu rješenju. Ako učenik dovoljno ne razumije ili ne pokazuje dovoljno interesa, nije uvijek na njemu krivnja; zadatak treba da je dobro odabran, ni pretežak ni prelagan, on treba da je prirodan i zanimljiv, a izvjesno vrijeme treba posvetiti prirodnom i privlačnom postavljanju zadatka.

Prije svega valja shvatiti tekst zadatka. Nastavnik može to donekle provjeriti zahtijevajući od učenika da ponovi tekst. Učenik bi morao da zna zadatak glatko formulirati. Učenik treba također da bude sposoban ukazati na glavne dijelove zadatka: na nepoznanicu, zadane podatke i uvjet. Stoga će nastavnik rijetko kada moći da izostavi pitanja: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet?*

Učenik treba da pažljivo razmatra glavne dijelove zadatka, više puta i s raznih strana. Ako je sa zadatkom u vezi neki crtež, treba *nacrtati sliku* i na njoj istaći nepoznanicu i zadane podatke. Treba li te objekte imenovati, valja *uvesti zgodne oznake*. Uslijed toga što treba paziti na prikladan izbor oznaka učenik je prisiljen da promatra objekte koje treba obilježiti. U ovom pripremnom stadiju bit će korisno još jedno pitanje, uz uvjet da ne očekujemo konačan, već samo privremen odgovor, slutnju. To pitanje glasi: *Je li moguće zadovoljiti uvjet?*

(U II dijelu, str. 29. »Razumijevanje zadatka« podijeljeno je u dva poglavlja: »Upoznavanje sa zadatkom« i »Stjecanje boljeg razumijevanja«.)

8. Primjer. Neke momente iz prijašnjih paragrafa razjasnit ćemo na jednom primjeru. Uzmimo ovaj jednostavni zadatak: *Kolika je dijagonala pravokutnog paralelepipeda (kvadra), kome su poznate duljina, širina i visina?* Da uzmognu uspješno raspravljati o ovom zadatku, učenici treba da znaju Pitagorin poučak i neke njegove planimetrijske primjene, no iz stereometrije su im dovoljna neznatna sistematska znanja. Nastavnik se tu može osloniti na učenikovo naivno poznavanje prostornih odnosa.

Nastavnik može ovaj zadatak učiniti interesantnim na taj način da ga konkretizira. Učionica ima oblik kvadra, kojemu bi se dimenzije mogle izmjeriti, a mogu se i samo grubo procijeniti. Učenici treba da nađu, »indirektno izmjere«, dijagonalu. Nastavnik pokazuje duljinu, širinu i visinu učionice, naznačuje pokretom ruke dijagonalu i oživljuje sliku, nacrtanu na ploči, upozoravajući neprestano na učionicu.

Razgovor između nastavnika i njegovih učenika započeo bi nekako ovako:

»*Što je nepoznato?*«

»Duljina dijagonale kvadra.«

»*Što je zadano?*«

»Duljina, širina i visina kvadra.«

»*Uvedi zgodne oznake!* Kojim slovom da označimo nepoznanicu?«

»Sa x.«

»Koja slova želiš za duljinu, širinu i visinu?«

»a, b, c.«

»*Kako glasi uvjet* koji veže a, b, c i x?«

»x je dijagonala kvadra kojemu su a, b, c duljina, širina i visina.«

»Ima li zadatak smisla? Mislim time *da li je uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice?*«

»Da. Znamo li a, b, c, znamo kvadar. Ako je određen kvadar, određena je i dijagonala.«

9. Stvaranje plana. Plan imamo kad znamo, ili bar u glavnim crtama znamo, koje račune, transformacije ili konstrukcije moramo izvesti da dobijemo nepoznanicu. Put od razumijevanja zadatka do postavljanja plana može biti dug i krivudav. U rješavanju zadatka svakako je glavno doći do ideje plana. Ta se ideja može pojavljivati postepeno. No ona može, nakon prividno bezuspješnih pokušaja i perioda krzmanja, i iznenada sinuti kao »sjajna ideja«. Najbolje što nastavnik može za svoje učenike učiniti jest: nenametljivo im pomoći da do takve »sjajne ideje« dođu. Pitanja i preporuke kojima ćemo se baviti nastoje izazvati takvu ideju.

Da bi mogao shvatiti položaj učenika, nastavnik treba da misli na svoje vlastito iskustvo, na teškoće i uspjehe što ih je sam imao pri rješavanju zadataka.

Mi znamo, razumije se, da je teško doći do dobre ideje ako predmet koji razmatramo poznamo samo vrlo malo, a da je to nemoguće ako ga ne poznamo nikako. Dobre ideje osnivaju se na iskustvu i znanju koje je prije stečeno. Samo sjećanje nije dovoljno za dobru ideju, no ne možemo imati dobrih ideja ako ne dozovemo u pamet neke pripadne činjenice. Sam materijal nije dovoljan za gradnju kuće, ali mi ne možemo graditi kuću ako nismo sakupili potreban materijal.

Materijal potreban za rješavanje matematičkog zadatka sastoji se od izvjesnih pojedinosti u vezi s ranije stečenim matematičkim znanjima, kao što su ranije riješeni zadaci ili ranije dokazani teoremi. Prema tome, često je zgodno da rad započinjemo pitanjem: *Znaš li neki srodni zadatak?*

Teškoća je u tome što obično ima previše zadataka koji su na neki način srodni s našim, tj. koji s njim imaju nešto zajedničko. Kako ćemo između njih izabrati jedan zadatak ili nekoliko njih koji će stvarno koristiti? Evo preporuke koja nam ukazuje na jedno bitno zajedničko svojstvo: *Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!*

Uspije li nam sjetiti se nekog ranije riješenog zadatka, koji je vrlo srodan našem sadašnjem zadatku, imamo sreću. Trebalo bi da takvu sreću opravdamo, a to možemo tako da taj zadatak iskoristimo. *Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti?*

Prethodna pitanja, ako smo ih dobro shvatili i ozbiljno promozgali, vrlo često pripomažu pokretanju ispravnog lanca misli, ali ona ne mogu pomoći uvijek, ona nemaju čarobne moći. Ako ona ne djeluju, moramo tražiti neke nove zgodne dodirne tačke i istraživati razne aspekte svog zadatka, moramo zadatak varirati, preobražavati, preinačiti. *Možeš li zadatak drugačije izraziti?* Neka pitanja naše tabele upućuju na osobite načine variranja zadatka, npr. na generalizaciju, specijalizaciju, primjenu analogije, ispuštanje jednog dijela uvjeta itd. Te su pojedinosti važne, ali na ovom mjestu ne možemo zalaziti u njih. Variranje zadatka može dovesti do zgodnog pomoćnog zadatka: *Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak!*

Pokušamo li upotrijebiti razne poznate zadatke i teoreme, razmatramo li razne modifikacije i uvodimo li razne pomoćne zadatke, udaljit ćemo se možda od svog prvobitnog zadatka toliko da ćemo zapasti u opasnost da ga potpuno izgubimo. No ima jedno dobro pitanje koje nas k njemu vraća: *Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet?*

10. Primjer. Vraćamo se na primjer koji smo razmatrali u § 8. Kad smo ga napustili, upravo je učenicima uspjelo da zadatak shvate i pomalo su se za nj zainteresirali. Moguće je da će oni sad imati neke vlastite ideje i pokazati neku inicijativu. Ako nastavnik ni uz pomno motrenje ne može otkriti nikakav znak takve inicijative, morat će pažljivo nastaviti dijalog s učenicima. Mora biti spreman da u nešto izmijenjenom obliku ponavlja pitanja na koja učenici ne odgovaraju. On mora očekivati da će se često sukobiti sa zbunjujućom šutnjom svojih učenika (koja će u daljnjem tekstu biti naznačena tačkicama . . . . .).

»*Znaš li neki srodni zadatak?*«

. . . . .

»*Promotri nepoznanicu! Znaš li neki zadatak koji sadrži istu nepoznanicu?*«

. . . . .

»No, *što je nepoznato?*«

»Dijagonala kvadra.«

»Znaš li neki *zadatak s istom nepoznanicom?*«

»Ne. Još nismo imali zadatak o dijagonali kvadra.«

»Znate li neki *zadatak sa sličnom nepoznanicom?*«

. . . . .

»Vidite, dijagonala je dužina. Niste li nikad rješavali zadatak u kome je bila nepoznata duljina neke dužine?«

»Da, da, svakako, jesmo. Tražili smo, na primjer, stranicu pravokutnog trokuta.«

»Dobro! *To je zadatak koji je srodan vašem, a već je riješen. Možete li ga upotrijebiti?*«

. . . . .

»Vi se srećom sjećate jednog zadatka koji ste već prije riješili, a srodan je vašem sadašnjem. Ne biste li ga upotrijebili? *Ne biste li uveli neki pomoćni element da uzmognete upotrijebiti taj zadatak?*«

. . . . .

»Pazite! Zadatak koga ste se sjetili obrađuje trokut. Imate li na svojoj slici kakav trokut?«

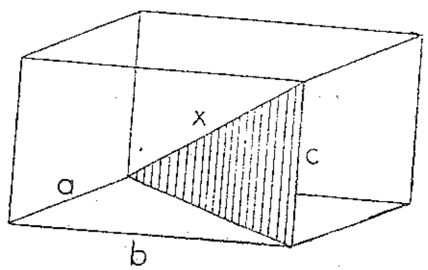
Nadajmo se da je posljednji mig bio dovoljno jasan da izazove ideju rješenja, koja se sastoji u tom da uvedemo pravokutni trokut (na sl. 1. šrafiran), kojemu je tražena dijagonala hipotenuza. Ipak, nastavnik treba da bude spreman i na slučaj da ni taj zaista jasan mig neće biti dovoljan da prodrma tromost učenika, pa stoga treba da ima u rezervi čitavu skalu sve jasnijih uputa.

»Biste li htjeli imati na slici trokut?«

»Koju vrstu trokuta biste najradije imali?«

»Dijagonalu još ne znate naći, a kažete da biste mogli naći stranicu trokuta. No, što ćete učiniti?«

»Biste li mogli odrediti dijagonalu kad bi ona bila stranica trokuta?«



Sl. 1.

Kad učenicima, uz veću ili manju pomoć, uspije napokon uvesti odlučujući pomoćni element, šrafirani pravokutni trokut (na sl. 1), nastavnik treba da se uvjeri vide li učenici dovoljno unaprijed prije nego ih potakne na stvarna izračunavanja.

»Mislim da je bila dobra ideja nacrtati taj trokut. Sad imate taj trokut, no imate li nepoznanicu?«

»Nepoznanica je hipotenuza tog trokuta. Mi je možemo izračunati po Pitagorinu poučku.«

»Možete, ako su poznate obje katete. Jesu li one poznate?«

»Jedna je kateta zadana, to je c. A drugu, mislim nije teško naći. Pa da — druga kateta je hipotenuza jednog drugog pravokutnog trokuta.«

»Vrlo dobro! Sad vidim da imate plan.«

11. Izvršavanje plana. Stvoriti plan, doći do ideje rješenja — nije lako. Da bismo u tom uspjeli, treba nam mnogo toga. Potrebna su ranije stečena znanja, disciplina duha, koncentracija na cilj i još nešto: sreća. Izvršiti plan — mnogo je lakše. Za to treba uglavnom samo strpljenja.

Plan daje opće konture; moramo se uvjeriti da li pojedinosti pristaju u te konture. Stoga treba da strpljivo, po redu, ispitujemo detalje dok sve ne bude potpuno jasno, dok ne iščezne i posljednje tamno mjesto u kojem bi se mogla sakrivati pogreška.

Ako je učenik uistinu shvatio plan, nastavniku će preostati razmjerno malo posla. Glavna je opasnost da bi učenik mogao svoj plan zaboraviti. To se lako događa ako ga je primio izvana, ako ga je prihvatio na osnovu nastavnikova autoriteta. No ako ga je učenik izradio sam, makar i uz izvjesnu pomoć, i ako mu je odlučna ideja sinula praćena unutrašnjim zadovoljstvom, neće on tu ideju lako izgubiti. Ipak, nastavnik treba da zahtijeva da učenik *kontrolira svaki korak*.

O ispravnosti nekog koraka u svom razmišljanju možemo se uvjeriti ili »intuitivno« ili »formalno«. Možemo se koncentrirati na dotično mjesto sve dok ga ne vidimo tako jasno i određeno da više nimalo ne sumnjamo u ispravnost toga koraka; ili pak možemo dotično mjesto izvesti prema formalnim pravilima. (Razlika između »uviđanja« i »formalnog dokaza« dovoljno je jasna u mnogim važnim slučajevima; daljnju diskusiju o tome možemo prepustiti filozofima.)

Glavno je da učenik bude istinski osvjedočen o ispravnosti svakog koraka. U izvjesnim će slučajevima nastavnik izričito naglasiti razliku između »uvidjeti« i »dokazati«: *Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan?* No možeš li i *dokazati da je korak ispravan?*

12. Primjer. Nastavit ćemo tamo gdje smo prekinuli na svršetku § **10.** Učenik napokon ima ideju rješenja. On vidi pravokutni trokut kome je nepoznata hipotenuza označena sa x, jedna kateta jest zadana visina c, dok je druga kateta dijagonala jednog pravokutnika. Učenika treba, po mogućnosti

nosti, navesti na to da uvede zgodnu oznaku. Uzmimo da je on sa y označio tu drugu katetu, dijagonalu pravokutnika sa stranicama a i b. Tako će možda jasnije vidjeti ideju rješenja, koja se sastoji u tome da se uvede pomoćni zadatak s nepoznanicom y. Obrađujući jedan, pa drugi pravokutni trokut, učenik će dobiti (vidi sl. 1)

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

a odatle, eliminiranjem pomoćne nepoznanice y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Nastavnik nema razloga da prekida učenika ako on tačno izvodi ove pojedinosti, osim da ga možda opomene neka *kontrolira svaki korak*. Tako nastavnik može pitati:

»Možeš li *jasno vidjeti* da je trokut sa stranicama x, y, c pravokutan?«

Učenik će možda na to pitanje pošteno odgovoriti »da«, ali bi se mogao jako zbuniti kad bi nastavnik, nezadovoljan intuitivnim uvjerenjem učenikovim, pitao dalje:

»A možeš li i *dokazati* da je taj trokut pravokutan?

Ako razred nije dobro uveden u stereometriju, bit će bolje da nastavnik ovo posljednje pitanje uopće ne postavi. Pa ako i jest dobro uveden, opet bi postojala izvjesna opasnost da odgovor na jedno sporedno pitanje postane glavna teškoća za većinu učenika.

13. Osvrt. I prilično dobri učenici, kad riješe zadatak, kad uredno napišu dokaz, zaklapaju svoje bilježnice i čekaju na nešto novo. Radeći tako, oni izostavljaju važnu i poučnu fazu rada. Osvrtom na gotovo rješenje, ponovnim razmatranjem i preispitivanjem rezultata i puta koji je do njega doveo, oni bi mogli učvrstiti svoje znanje i povećati svoje sposobnosti u rješavanju zadataka. Dobar nastavnik treba da smatra da nijedan zadatak nikad nije potpuno iscrpen, i to mišljenje treba ucjepljivati svojim učenicima. Uvijek ostaje još posla. Ako smo dovoljno marljivi i oštroumni, poboljšat

ćemo svako rješenje, a u svakom slučaju bolje ćemo ga razumjeti.

Učenik je dakle izvršio svoj plan. Napisao je rješenje kontrolirajući pri tom svaki korak. Prema tome, imao bi razloga vjerovati da mu je rješenje ispravno. Ipak: pogreške su uvijek moguće, naročito ako je dokazivanje bilo dugo i zapleteno. Stoga je provjeravanje poželjno. Napose valja na to misliti ako postoji neki brz i intuitivan postupak za provjeravanje rezultata ili dokaza. *Možeš li kontrolirati rezultat? Možeš li kontrolirati dokaz?*

Da bismo se osvjedočili o postojanju ili o svojstvima nekog predmeta, mi ga želimo i gledati i dodirivati. I kao što dajemo prednost percepciji preko dva razna osjetila, tako ćemo više voljeti osvjedočenje dobiveno pomoću dva razna dokaza: *Možeš li rezultat izvesti drugačije?* Svakako će nam kratak i intuitivan izvod biti draži od dugog i teškog: *Možeš li ga uočiti na prvi pogled?*

Vanredno je važno da nastavnik kod svojih učenika ne pobudi utisak kao da matematički problemi među sobom imaju malo veze, a da nemaju nikakve veze s bilo čim drugim. Osvrt na rješavanje zadatka zgodna je prilika da se istraže veze tog zadatka. Učenicima će zaista biti interesantno da pogledaju unazad nakon što su riješili zadatak, ako su se pri rješavanju čestito trudili, pa su svjesni da su nešto uradili. Osim toga, oni će živo željeti da vide što mogu još postići tim svojim naporom i kako mogu neki drugi put postupiti jednako dobro. Nastavnik može potaknuti svoje učenike da se prisjete slučajeva u kojima bi mogli ponovo iskoristiti upotrijebljeni postupak ili primijeniti dobiveni rezultat. *Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak?*

14. Primjer. U § **12.** učenici su napokon dobili rješenje. Ako su a, b, c tri brida kvadra koja izlaze iz istog vrha, dijagonala je

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Možeš li kontrolirati rezultat? Nastavnik ne može na ovo pitanje očekivati dobar odgovor od neiskusnih učenika. Međutim, učenici treba da ipak dosta rano saznaju kako zadaci

»sa slovima« imaju veliku prednost pred čisto numeričkim zadacima. Ako je zadatak zadan »slovima«, njegov rezultat možemo provjeriti na razne načine, za koje je numerički zadatak posve nezgodan. Iako je naš primjer vrlo jednostavan, dovoljan je da to pokaže. Nastavnik može o rezultatu postavljati razna pitanja, na koja učenici mogu lako odgovoriti »da«, dok bi odgovor »ne« ukazao na ozbiljnu pogrešku u rezultatu.

»*Jesi li iskoristio sve zadano?* Pojavljuju li se u tvojoj formuli za dijagonalu sve zadane veličine a, b, c?«

»Duljina, širina i visina jednako su važne u našem pitanju; naš je zadatak simetričan s obzirom na a, b, c. Je li izraz, dobiven za dijagonalu, simetričan u a, b, c? Ostaje li on nepromijenjen ako međusobno zamjenjujemo a, b, c?«

»Naš je zadatak stereometrijski: odrediti dijagonalu kvadra kome su zadani bridovi a, b, c. Taj je zadatak analogan planimetrijskom zadatku: odrediti dijagonalu pravokutnika kome su zadane stranice a, b. Da li je i rezultat našeg ,prostornog' zadatka analogan rezultatu ,ravninskog' zadatka?«

»Ako se visina c smanjuje i najzad nestaje, paralelepiped postaje paralelogram. Uvrstiš li u svoju formulu $c = 0$, dobivaš li ispravnu formulu za dijagonalu pravokutnog paralelograma?«

»Raste li visina c, raste i dijagonala. Pokazuje li to i tvoja formula?«

»Rastu li sva tri brida a, b, c kvadra u istom omjeru, raste i dijagonala u tom istom omjeru. Zamijeniš li u svojoj formuli a, b, c sa $10a$, $10b$, $10c$, morao bi zbog te supstitucije i izraz za dijagonalu ispasti deseterostruk. Da li je tome tako?«

»Mjerimo li a, b, c u decimetrima, tvoja formula daje i dijagonalu mjerenu decimetrima. Ako sve mjere pretvoriš u centimetre, formula mora ostati ispravna. Da li je tome tako?«

(Posljednja dva pitanja u biti su ekvivalentna; vidi PROVJERAVANJE RAZMATRANJEM DIMENZIJA.)

Učinak tih pitanja je dobar, i to iz više razloga. Ponajprije inteligentnog učenika ne može a da ne impresionira či-

njenica da formula odolijeva tolikim iskušenjima. Prije je on bio uvjeren da je formula ispravna, jer ju je pažljivo izveo. A sad je uvjeren još više. Ovo njegovo povećano povjerenje potječe iz drugog vrela, valja ga pripisati nekoj vrsti »eksperimentalne evidentnosti«. Nadalje, zahvaljujući prethodnim pitanjima, pojedinosti formule dobivaju novo značenje i povezuju se raznim činjenicama. Stoga će se povećati i izgledi da će učenici formulu upamtiti; njihovo znanje postaje čvršće. Najzad, ta se pitanja lako mogu prenijeti na slične zadatke. Kad stekne nešto iskustva sa sličnim zadacima, inteligentan će učenik moći da zapazi opće osnovne ideje: iskorišćivanje svih bitnih podataka, variranje podataka, simetriju, analogiju. Ako se on navikne da svoju pažnju usmjerava na takve stvari, bit će to svakako vrlo korisno za njegovu vještinu u rješavanju zadataka.

Možeš li kontrolirati dokaz? U težim i značajnijim slučajevima trebat će provjeravati dokaz korak po korak. U običnim slučajevima dovoljno je radi provjeravanja izvući izvjesna »škakljiva« mjesta. U našem će slučaju biti uputno da u osvrtu prodiskutiramo jedno pitanje, o kojem je ranije, kad još nismo bili našli rješenje, bilo manje uputno diskutirati. Pitanje glasi: Možeš li *dokazati* da je trokut sa stranicama x, y, c pravokutan? (Vidi završetak § 12.)

Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak? S nešto potpore, nakon jednog ili dva primjera, učenici će lako pronalaziti primjene koje se uglavnom sastoje u tome da se apstraktnim matematičkim elementima zadatka pridaje neka *konkretna interpretacija.* Nastavnik je sam upotrijebio takvu konkretnu interpretaciju kad je u našem zadatku za kvadar uzeo učionicu. Trom učenik predložit će možda kao primjenu da se umjesto dijagonale učionice izračuna dijagonala obližnje gostionice. Iscrpu li učenici svoju fantaziju, može nastavnik sam postaviti neznatno promijenjen zadatak, na primjer: »U kvadru je zadana duljina, širina i visina. Nađi udaljenost od njegova središta do jednog vrha.«

Učenici mogu ovdje primijeniti *rezultat* svog upravo riješenog zadatka ako primijete da je tražena udaljenost polovina upravo izračunate dijagonale. Ili pak mogu primijeniti *metodu* uvodeći prikladne pravokutne trokute. (Ova je druga alternativa u našem slučaju manje jasna i donekle nespretna.)

Nakon ove primjene može nastavnik pretresti međusobni položaj četiriju dijagonala u kvadru i razmatrati šest piramida, kojima su baze međašnje plohe kvadra, središte kvadra im je zajednički vrh, a poludijagonale su im pobočni bridovi. Ako je u učenika dovoljno probuđena geometrijska fantazija, trebalo bi da se nastavnik sad vrati na svoje pitanje: *Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak?* Sad su veći izgledi da će učenici naći neku zanimljiviju konkretnu interpretaciju, na primjer:

»Na nekoj zgradi, u središtu njenog horizontalnog pravokutnog krova, dugog 21 m, širokog 16 m, treba podići jarbol za zastavu visok 8 m. Da učvrstimo jarbol, potrebna su nam četiri jednaka čelična konopa. Konopi treba da se protežu od jednog zajedničkog mjesta na jarbolu, koje je 2 m ispod vrha jarbola, pa do četiriju ugaonih tačaka na krovu. Koliko je dugačak pojedini konop?«

Učenici će primijeniti *metodu* svog, u tančine riješenog zadatka i uvesti jedan pravokutni trokut u vertikalnoj, a drugi u horizontalnoj ravnini. Ili će pak upotrijebiti *rezultat* zamislivši pravokutni paralelepiped, kome je dijagonala x jedan od četiri konopa, a bridovi su mu

$$a = 10{,}5 \qquad b = 8 \qquad c = 6$$

Jednostavnom primjenom formule naći će $x = 14{,}5$.

Daljnje primjere vidi u MOŽEŠ LI REZULTAT UPOTRIJEBITI?

15. Različiti prilazi. Zadržat ćemo se još neko vrijeme na zadatku što smo ga razmatrali u §§ **8, 10, 12, 14.** Glavni posao, pronalaženje plana, bio je opisan u § **10**. Sad ćemo napomenuti da je nastavnik mogao postupati i drugačije. Polazeći s istog mjesta kao u § **10**, mogao je poći nešto drugačijom linijom postavljajući, na primjer, ovakva pitanja:

»*Znaš li neki srodni zadatak?*«

»Znaš li neki *analogni* zadatak?«

»Ti vidiš da je postavljeni zadatak stereometrijski. Bi li mogao navesti neki jednostavniji analogni zadatak iz planimetrije?«

»Vidiš da naš zadatak obrađuje prostornu figuru, on se bavi dijagonalom pravokutnog paralelepipeda. Kako bi mogao glasiti analogni zadatak u ravnini? Bavio bi se... dijagonalom... jednog... pravokutnog...«

»Paralelograma.«

Ako su učenici čak i vrlo spori, ravnodušni i nedosjetljivi, ipak će najzad biti prisiljeni da bar nešto malo pridonesu ideji. Osim toga, ako su učenici baš toliko tvrdokorni, nastavnik ne treba obrađivati zadatak o paralelepipedu dok nije, kao pripravu, obradio analogni zadatak o paralelogramu. U tom slučaju može postupati otprilike ovako:

»*Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti?*«

»*Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj zadatak?*«

Napokon će nastavniku možda uspjeti da izazove kod učenika željenu ideju. Ona se sastoji u tom da se dijagonala zadanog kvadra shvati kao dijagonala prikladnog pravokutnika, koji treba uvesti u sliku (kao presjek kvadra ravninom koja prolazi dvjema suprotnim bridovima). Zamisao je u biti ista kao i prije (§ **10**), ali je put drugi. U § **10.** kontakt s raspoloživim učenikovim znanjem bio je uspostavljen preko nepoznanice; sjetili su se ranije riješenog zadatka jer je on sadržavao istu nepoznanicu kao i naš sadašnji zadatak. Ovdje je pak analogija most k ideji rješenja.

16. Nastavnikova metoda postavljanja pitanja, prikazana u §§ **8, 10, 12, 14, 15,** u biti je ova: Započni s jednim općenitim pitanjem ili preporukom iz naše tabele pa prelazi, ako treba, postepeno na sve specifičnija i sve konkretnija pitanja odnosno preporuke, dok najzad jedno od njih ne izmami iz učenika odgovor. Treba li pomoći učeniku u realiziranju njegove ideje, započni, ako je moguće, iznova s općenitim pitanjem ili preporukom iz tabele pa se, ako treba, navrati ponovo specifičnijem, i tako dalje.

Naša je tabela zapravo prva tabela ove vrste. Čini se da je dovoljna za većinu jednostavnih slučajeva, no nema sumnje da bi se mogla usavršiti. Važno je, međutim, da preporuke od kojih polazimo budu jednostavne, prirodne i općenite, a sama tabela da ne bude preduga.

Preporuke moraju biti jednostavne i prirodne, inače ne mogu biti *nenametljive*.

Preporuke moraju biti općenite, primjenjive ne samo na dani zadatak već i na zadatke svake vrste ako hoćemo da one pripomognu razvoju učenikovih *sposobnosti*, a ne tek neke specijalne tehnike.

Tabela treba da je kratka kako bismo pitanja mogli ponavljati često, neizvještačeno i u raznim okolnostima. Na taj se način pruža prilika da ih učenik napokon stvarno usvoji i da ta pitanja pridonesu razvoju njegovih *umnih navika*.

Postepen prijelaz na specifičnije preporuke potreban je zato da učenik, što je moguće više, *sudjeluje u radu*.

Ova metoda postavljanja pitanja nije kruta. Ona to i ne smije biti jer je bilo kakav krut, mehanički, cjepidlačarski postupak u ovim stvarima neizbježno štetan. Naša metoda dopušta izvjesnu elastičnost i variranje, dopušta različito prilaženje (§ **15**). Ta se metoda može i treba primjenjivati uvijek tako da pitanja koja postavlja nastavnik *mogu pasti na um i samom učeniku*.

Ako čitalac želi da u svom razredu pokuša s metodom koja se ovdje predlaže, svakako je potrebno da postupa oprezno. On treba da pomno prouči primjer iz § **8.** i primjere koji će biti obrađeni u §§ **18, 19.** i **20.** Treba da pažljivo priprema primjere koje namjerava obrađivati, razmatrajući pri tom i različite prilaze. Trebalo bi da započne s nekoliko pokusa i da postepeno iznalazi koliko mu uspijeva ovladavanje tom metodom, kako je primaju učenici i koliko je vremena za to potrebno.

17. Dobra i loša pitanja. Ako smo dobro shvatili metodu postavljanja pitanja formuliranu u prethodnom paragrafu, moći ćemo uspoređivanjem prosuditi vrijednost izvjesnih

preporuka, koje bismo možda dali učenicima u namjeri da im pomognemo.

Vratimo se u situaciju iznesenu na početku § **10,** kad je bilo postavljeno pitanje: *Znaš li neki srodan zadatak?* Umjesto ovog pitanja moglo se, u najboljoj namjeri da se učenicima pomogne, postaviti pitanje: *Možeš li primijeniti Pitagorin poučak?*

Namjera može biti najbolja, ali je pitanje od loših najlošije. Moramo biti svjesni u kakvoj je situaciji ono bilo postavljeno, pa ćemo tada vidjeti da postoji niz prigovora ovakvoj »pomoći«.

(1) Ako je učenik blizu rješenju, shvatit će možda preporuku koja je u ovom pitanju. Ako nije blizu, on vjerojatno neće uopće vidjeti kamo smjera pitanje. Prema tome, pitanje ne pomaže tamo gdje je pomoć najpotrebnija.

(2) Ako je učenik shvatio preporuku, odala mu je ona svu tajnu, i njemu preostaje samo vrlo malo posla.

(3) Preporuka je previše specijalna. Ako ju je učenik čak i mogao upotrijebiti u rješavanju danog zadatka, on time nije ništa naučio za buduće zadatke. Pitanje nije instruktivno.

(4) Ako je učenik i shvatio preporuku, jedva će moći razumjeti kako je nastavnik došao na pomisao da postavi upravo takvo pitanje. A kako bi onda mogao učenik sam naći na takvo pitanje? Pitanje se pojavljuje kao neprirodno iznenađenje, ono zaista nije instruktivno.

Nijedan se od ovih prigovora ne može iznijeti protiv postupka koji je opisan u § **10.** odnosno u § **15.**

DALJNJI PRIMJERI

18. Jedan konstruktivan zadatak. *U zadani trokut upiši kvadrat. Dva njegova vrha neka leže na bazi trokuta, a ostala dva na drugim dvjema stranicama toga trokuta.*

»*Što je nepoznato?*«

»Kvadrat.«

»*Što je zadano?*«

»Zadan je trokut, inače ništa.«

»*Kako glasi uvjet?*«

»Četiri vrha kvadrata treba da se nalaze na obodu trokuta, i to dva vrha na bazi, a po jedan vrh na svakoj od ostalih dviju stranica.«

»*Da li je moguće zadovoljiti uvjet?*«

»Mislim da je moguće. No nisam siguran.«

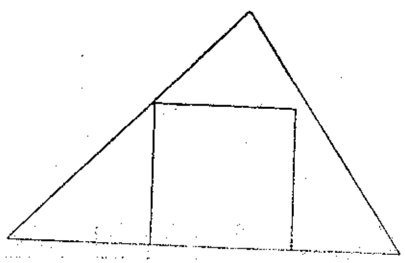
»Čini se da ti zadatak baš nije lak. *Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak!* Bi li mogao ispuniti *jedan dio uvjeta?*«

»Što mislite pod jednim dijelom uvjeta?«

»Ti razabireš da se uvjet odnosi na sve vrhove kvadrata. Koliko ima vrhova?«

»Četiri.«

»Dio uvjeta odnosio bi se na broj koji bi bio manji od četiri. *Zadrži samo jedan dio uvjeta, a odbaci drugi dio!* Koji se dio uvjeta može lako zadovoljiti?«



Sl. 2.

»Lako je nacrtati kvadrat kome su dva vrha na obodu trokuta — dapače mogu biti i tri!«

»*Nacrtaj sliku!*«

Učenik crta sliku 2.

»*Zadržao si samo jedan dio uvjeta, a odbacio drugi dio. Dokle je sad nepoznanica određena?*«

»Kvadrat nije određen ako su mu samo tri vrha na obodu trokuta.«

»Dobro! *Nacrtaj!*«

Pojavljuje se slika 3.

»Kao što si malo prije kazao, kvadrat nije određen onim *dijelom uvjeta, koji si zadržao. Kako se on može mijenjati?*«

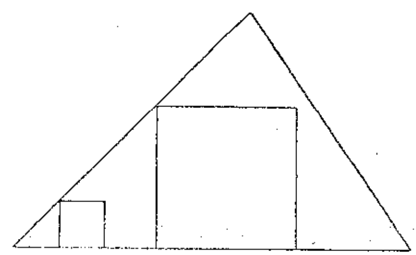
. . . . .

»Tri su vrha na obodu trokuta, no četvrti vrh još nije tamo gdje bi morao biti. Tvoj je kvadrat, kako si rekao, neodređen, on se može mijenjati. Isto vrijedi za četvrti vrh. *Kako se taj vrh može mijenjati?*«

. . . . .

»Ako hoćeš, pokušaj eksperimentalno! Crtaj daljnje kvadrate, kojima su tri vrha na obodu trokuta, kao što si nacrtao prva dva takva kvadrata! Crtaj manje i veće kvadrate! Što ti se čini da će biti geometrijsko mjesto četvrtih vrhova? *Kakva je promjena moguća?*«

Nastavnik je doveo učenika vrlo blizu ideji rješenja. Ako je učenik sposoban pogoditi da je to geometrijsko mjesto pravocrtno, on ideju ima.



Sl. 3.

19. Jedan dokazni zadatak. *Dva kuta leže u različitim ravninama. Svaki krak jednoga kuta paralelan je i istoga smisla s odgovarajućim krakom drugoga kuta. Dokaži da su takvi kutovi jednaki!*

Ono što treba da dokažemo jedan je od osnovnih stereometrijskih teorema. Zadatak možemo postaviti učenicima koji dobro znaju planimetriju, a iz stereometrije poznaju onih nekoliko činjenica koje pripremaju taj teorem u Euklidovim »Elementima«. (Teorem koji smo postavili pa ga sad hoćemo dokazati jest 10. teorem u Euklidovoj XI knjizi.) Kurzivom su štampana ne samo pitanja i preporuke koje citiramo iz naše tabele već i takva koja im korespondiraju onako kako međusobno korespondiraju »dokazni zadaci« i »odredbeni zadaci«. (Ta je korespondencija sistematski izložena u članku ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI, 5, 6.)

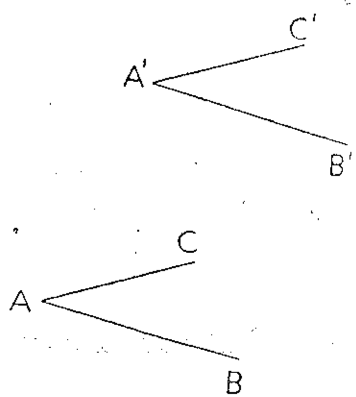
»Što je pretpostavka?«

»Dva kuta leže u različitim ravninama. Svaki krak jednoga kuta usporedan je i istoga smisla s odgovarajućim krakom drugoga kuta.«

»Što je tvrdnja?«

»Kutovi su jednaki.«

»Nacrtaj sliku! Uvedi zgodne oznake!«



Sl. 4.

Učenik crta sliku 4. i bira, uz veću ili manju nastavnikovu pomoć, slova koja ovdje vidimo.

»Što je pretpostavka? Izreci je sad upotrebljavajući svoje oznake!«

»A, B, C nisu u istoj ravnini u kojoj su A', B', C'. Zatim je $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. Osim toga je AB istog smisla kao $A'B'$, a AC kao $A'C'$.«

»Što je tvrdnja?«

»$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.«

»Promotri tvrdnju! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog teorema koji sadrži istu ili sličnu tvrdnju!«

»Ako su dva trokuta sukladna, homologni kutovi su im jednaki.«

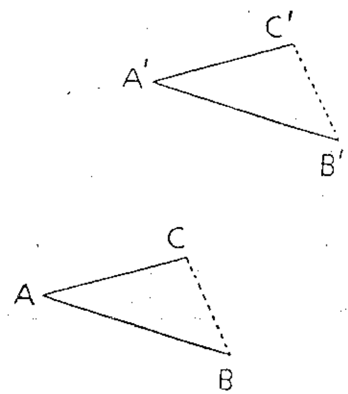
»Vrlo dobro! Evo ti sad *teorema koji je srodan tvom, a već je dokazan! Možeš li ga upotrijebiti?«*

»Mislim da mogu, ali ne vidim još potpuno kako to mogu.«

»Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj teorem?«

. . . . .

»Teorem što si ga malo prije vrlo opravdano spomenuo vrijedi za trokute, za sukladne trokute. Imaš li na svojoj slici neke trokute?«



Sl. 5.

»Nemam, ali mogao bih da ih uvedem. Spojit ću B sa C i B' sa C'. Tada imamo dva trokuta, $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$.«

»Tako je! No čemu će ti ovi trokuti?«

»Da dokažem tvrdnju $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.«

»Dobro! Ako to želiš dokazati, kakvi su ti trokuti potrebni?«

»Sukladni trokuti. Pa da, jasno, ja mogu B, C, B', C' odabrati tako da bude

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{AC} = \overline{A'C'}.«$$

»Vrlo dobro! Prema tome, što želiš sada dokazati?«

»Želim dokazati da su ti trokuti sukladni, tj.

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Kad bi mi uspjelo to dokazati, odmah bi iz tog proizlazila ispravnost tvrdnje $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.«

»Lijepo. Ti sad imaš novi cilj, usmjeravaš se prema novoj tvrdnji. *Promotri tvrdnju! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog teorema koji sadrži istu ili sličnu tvrdnju!*«

»Dva su trokuta sukladna, ako ... ako se podudaraju u sve tri stranice.«

»Vrlo dobro — mogao si odabrati i lošiji teorem! To je sada *teorem koji je srodan tvom, a već je dokazan! Možeš li ga upotrijebiti?*«

»Mogao bih ga upotrijebiti kada bih znao da je $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.«

»Tako je! Što ti je dakle cilj?«

»Dokazati da je $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.«

»*Nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog teorema koji ima istu ili sličnu tvrdnju!*«

»Da, ja znam jedan teorem koji završava sa: '... tada su dvije dužine jednake'. No on ne pristaje sasvim ovamo.«

»*Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj teorem?*«

.....

»Gledaj — kako ćeš dokazati da je $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ako na slici nema nikakve veze između $\overline{BC}$ i $\overline{B'C'}$?«

.....

Jesi li iskoristio pretpostavku? Što je pretpostavka?

»Pretpostavljamo da je $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Pa naravno, to moramo iskoristiti!«

»*Jesi li iskoristio čitavu pretpostavku?* Kažeš da je $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$. Je li to sve što o tim dužinama znaš?«

»Ne. Dužina $\overline{AB}$ jest prema konstrukciji i jednaka dužini $\overline{A'B'}$. Te su dvije dužine i paralelne i jednake. Isto vrijedi i za dužine $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$.«

»Dvije paralelne jednake dužine — to je zanimljiva kombinacija. *Jesi li je već prije vidio?*«

»Jesam! Paralelogram! Spojit ću A sa A', B sa B', i C sa C'.«

»Ideja nije loša. Koliko paralelograma imaš sad na svojoj slici?«

»Dva. Ne — tri. Ne — dva. Mislim da su dva za koja mogu smjesta dokazati da su paralelogrami. A zatim je tu treći lik, koji čini se da jest paralelogram. Nadam se da ću moći dokazati da je on zaista paralelogram. I tada će čitav dokaz brzo biti gotov.«

Iz prethodnih odgovora mogli smo razabrati da je učenik inteligentan. Nakon njegove posljednje napomene o tome nema više sumnje.

Taj je učenik sposoban naslutiti matematički rezultat i jasno razlikovati slutnju od dokaza. On također zna da naslućivanja mogu biti više ili manje plauzibilna. On se okoristio matematičkom nastavom, stekao je neko stvarno iskustvo u rješavanju zadataka. On zna nadoći na dobru ideju i umije je iskoristiti.

20. Jedan zadatak o brzini. *U stožastu posudu utječe voda brzinom r. Posuda ima oblik uspravnog kružnog stošca, kome je baza horizontalna, a vrh okrenut dolje. Polumjer baze jest a, visina stošca jest b. Odredi brzinu kojom se uzdiže razina vode ako je dubina vode y! Kolika je, najzad, numerička vrijednost nepoznanice ako je $a = 4$ dm, $b = 3$ dm, $r = 2$ dm³/min, $y = 1$ dm?*

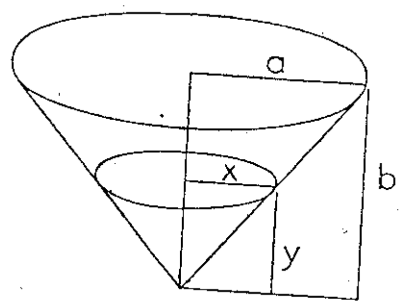
Pretpostavlja se da učenici znaju najjednostavnija pravila diferenciranja i pojam »brzine promjene«.

»*Što je zadano?*«

»Polumjer stošca $a = 4$ dm, njegova visina $b = 3$ dm, brzina utjecanja vode $r = 2\ \mathrm{dm^3/min}$ i dubina vode u nekom određenom momentu $y = 1$ dm.«

»Tako je. Formulacija zadatka preporučuje nam da računamo s općim brojevima ne obazirući se privremeno na numeričke vrijednosti. Treba dakle da nepoznanicu izrazimo pomoću a, b, r, y, pa tek da na kraju, kada dobijemo izraz za nepoznanicu u općim brojevima, uvrstimo numeričke vrijednosti. Ja bih poslušao taj savjet. *Što je nepoznato?*«

»Brzina kojom se uzdiže razina vode ako je dubina vode y.«



Sl. 6.

»Što to znači? Možeš li to kazati drugim riječima?«

»Brzina kojom raste dubina vode.«

»Što to znači? *Možeš li to izraziti još nekako drugačije?*«

»Brzina promjene dubine.«

»Tačno. Brzina promjene veličine y. No što je to brzina promjene? *Vrati se na definiciju!*«

»Brzina promjene neke funkcije jest derivacija.«

»Tako je. No da li je y funkcija? Kako smo prije rekli, ne obaziremo se na numeričku vrijednost veličine y. Možeš li sebi predočiti da se y mijenja?«

»Mogu. Dubina vode y raste s vremenom.«

»Prema tome y je funkcija čega?«

»Vremena t.«

»Dobro. *Uvedi zgodne oznake!* Kako bi napisao brzinu promjene od y matematičkim simbolima?«

»$\frac{dy}{dt}$.«

»Dobro. To je, prema tome, tvoja nepoznanica. Nju treba da izraziš pomoću a, b, r, y. Uzgred rečeno, jedna je od zadanih veličina neka ‚brzina'. Koja?«

»r je brzina kojom voda utječe u posudu.«

»Što to znači? Možeš li to kazati drugim riječima?«

»r je brzina promjene volumena u posudi.«

»Što to znači? *Možeš li to izraziti još nekako drugačije?* Kako bi to napisao pomoću *zgodnih oznaka?*«

»$r = \frac{dV}{dt}$.«

»Što je V?«

»Volumen vode u posudi u času t.«

»Dobro. Moraš dakle izraziti $\frac{dy}{dt}$ pomoću a, b, $\frac{dV}{dt}$, y. Kako ćeš to uraditi?«

. . . . .

»*Ne možeš li riješiti postavljen zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak!* Ako još ne razabireš vezu između $\frac{dy}{dt}$ i zadanih veličina, pokušaj uspostaviti neku jednostavniju vezu, koja će ti poslužiti kao prelazno uporište!«

. . . . .

»Ne vidiš li da tu ima i drugih veza? Jesu li npr. y i V međusobno nezavisni?«

»Nisu. Ako raste y, raste i V.«

»Prema tome, tu ti je već neka veza. Koja?«

»V je volumen stošca kome je visina y. No ja ne znam još koliki je polumjer toga stošca.«

»Ipak ga možeš uzeti u obzir. Označi taj polumjer nekako, recimo sa x!«

»$V = \frac{\pi x^2 y}{3}$.«

»Tako je! A što znaš o veličini x? Je li ona nezavisna od y?«

»Ne. Ako raste dubina vode y, raste i polumjer x slobodne površine.«

»Tu imamo vezu. Koju?«

»Pa jasno — slične trokute!

$$x : y = a : b.«$$

»Ovu novu vezu treba svakako iskoristiti. Ne zaboravi da želiš vezu između V i y!«

»Imam

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3 b^2}.«$$

»Vrlo dobro! Čini se da bi nas ovo moglo odvesti dalje, zar ne? Samo ne smiješ zaboraviti svoj cilj. *Što je nepoznato?*«

» $\frac{dy}{dt}$.«

»Treba da nađeš vezu između $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ i ostalih veličina. A ovdje imaš vezu između y, V i ostalih veličina. Što da se radi?

»Pa jasno: treba derivirati!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \frac{dy}{dt}$$

Evo ga! Tu smo!«

»Lijepo! A što je s numeričkim vrijednostima?«

»Ako je $a = 4$, $b = 3$, $\frac{dV}{dt} = r = 2$, $y = 1$, tada je

$$2 = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 1}{9} \frac{dy}{dt}.«$$

II DIO

KAKO RJEŠAVATI ZADATAK

DIJALOG

Upoznavanje sa zadatkom

Gdje da počnem? Pođi od formulacije zadatka!

Što da radim? Predoči sebi zadatak kao cjelinu jasno i živo, koliko ti je to god moguće! U prvi mah ne treba da se brineš o pojedinostima.

Što ću time postići? Zadatak moraš razumjeti, upoznati se s njim i znati mu smisao! Pažnja što je posvećuješ zadatku potaknut će osim toga i tvoju memoriju i pripremiti je na podsjećanje pojedinosti u vezi sa zadatkom.

Stjecanje boljeg razumijevanja

Gdje da počnem? Pođi ponovo od formulacije zadatka! Započni tada kada ti je ta formulacija toliko jasna i toliko duboko usađena u tvoju svijest da je možeš za neko vrijeme izgubiti iz vida, bez bojazni da je potpuno izgubiš!

Što da radim? Razluči glavne dijelove svoga zadatka! Pretpostavka i tvrdnja glavni su dijelovi »dokaznog zadatka«, a nepoznanica, zadani podaci i uvjet glavni su dijelovi »odredbenog zadatka«. Prođi glavne dijelove svoga zadatka, razmatraj ih po redu, razmatraj ih u raznim kombinacijama povezujući svaki detalj s drugim detaljem i s cjelinom zadatka!

Što ću time postići? Pripremit ćeš i razjasniti detalje koji će kasnije vjerojatno biti važni.

Tragom korisne ideje

Gdje da počnem? Pođi od razmatranja glavnih dijelova svoga zadatka! Započni tada kada su zbog tvoga prijašnjeg rada ti glavni dijelovi jasno sređeni i posve shvaćeni, a tvoje je pamćenje spremno za suradnju!

Što da radim? Razmatraj svoj zadatak s različitih strana pa pokušaj uspostaviti dodir sa znanjem što si ga stekao ranije!

Razmatraj svoj zadatak s različitih strana! Istakni razne dijelove, ispitaj razne detalje, ispituj iste detalje ponovo, ali drugačije, kombiniraj detalje na različite načine, prilazi im s različitih strana! Pokušaj da u svakom detalju razabereš neko novo značenje, neku novu interpretaciju cjeline!

Potraži dodirne tačke sa znanjem što si ga stekao ranije! Nastoj sjetiti se što ti je ranije u sličnim situacijama pomagalo! Pokušaj da u onom što istražuješ prepoznaš nešto poznato, a u onom što si prepoznao nastoj zapaziti nešto korisno!

Što bih mogao zapaziti? Korisnu ideju, a možda i odlučnu ideju, koja će ti na prvi pogled pokazati put k cilju.

U čemu je korist neke ideje? Korisna ideja pokazuje ti čitav put ili jedan njegov dio. Ona te, više ili manje jasno, navodi kako da postupaš. Ideje su potpunije ili manje potpune. Bit ćeš sretan ako uopće budeš imao ikakvu ideju.

Što ću s nepotpunom idejom? I nju moraš razmatrati! Ako ti se čini korisna, razmatraj je dulje! Ako ti se čini pouzdana, moraš ustanoviti kako te daleko vodi, pa iznova procijeniti situaciju! Zbog tvoje korisne ideje situacija se izmijenila. Promotri novu situaciju s različitih strana i potraži dodirne tačke sa znanjem što si ga ranije stekao!

Što ću postići takvim ponavljanjem? Može ti pasti na um neka nova ideja. Ona će te možda odmah odvesti k cilju. A možda će ti nakon nje trebati još neke korisne ideje. Neke će te ideje možda i zavesti. Ipak, moraš biti zadovoljan svim

novim idejama, i neznatnijim, i mutnijim, i dopunskim idejama, koje mutnoj ideji daju neku tačnost ili nastoje korigirati neku manje sretnu ideju. Dapače, ako neko vrijeme ne dođeš ni na kakvu vredniju novu ideju, treba da budeš zadovoljan ako svoju koncepciju zadatka upotpuniš, čvršće povežeš, još je bolje ujednačiš odnosno uravnotežiš.

Izvršavanje plana

Gdje da počnem? Pođi od sretne ideje koja te je povela k rješenju! Započni tada kad se osjećaš siguran da vladaš glavnom vezom i kad pouzdano smatraš da ćeš moći upotpuniti manje važne detalje kad to bude potrebno!

Što da radim? Ovladaj sigurno glavnom vezom! Provedi detaljno sve algebarske i geometrijske operacije koje si prije spoznao kao praktične! Uvjeri se o ispravnosti svakog pojedinog koraka formalnim zaključivanjem ili intuitivnim uviđanjem ili, ako je to moguće, na oba načina! Ako je tvoj zadatak vrlo kompliciran, zgodno je razlikovati »velike« i »male« korake, imajući na umu da se svaki veliki korak sastoji od više manjih. Kontroliraj najprije velike korake pa zatim prijeđi na male!

Što ću time postići? Na taj ćeš način moći da dobiješ takav prikaz rješenja gdje će svaki korak biti nesumnjivo ispravan.

Osvrt

Gdje da počnem? Počni s rješenjem, potpunim i tačnim u svakoj pojedinosti!

Što da radim? Promotri rješenje s različitih strana i potraži dodirne tačke sa znanjem što si ga ranije stekao!

Razmatraj detalje rješenja pa ih pokušaj pojednostavniti koliko je to god moguće! Pregledaj dulje dijelove rješenja pa ih pokušaj sažeti! Pokušaj čitavo rješenje sagledati na prvi pogled! Nastoj poboljšati kraće ili dulje dijelove rješenja, pokušaj to s čitavim rješenjem! Prikaži svoje rješenje zorno i uklopi ga što prirodnije u svoje ranije stečeno znanje! Ispitaj pomno ideju koja te je dovela do rješenja, pokušaj u njoj uočiti bitni moment pa ga nastoj upotrijebiti u drugim zadacima! Pomno ispitaj rezultat i pokušaj ga primijeniti kod drugih zadataka!

Što ću time postići? Možeš naći novo i bolje rješenje, možeš otkriti neke nove i zanimljive činjenice. A u svakom ćeš slučaju, ako se navikneš da svoja rješenja na takav način pregledavaš i provjeravaš, steći sređeno i upotrebljivo znanje i razvijati svoje sposobnosti u rješavanju zadataka.

III DIO

MALI HEURISTIČKI LEKSIKON

Analogija je neka vrsta sličnosti. Slični objekti međusobno se podudaraju na neki način, analogni objekti *podudaraju se u izvjesnim odnosima* između svojih odgovarajućih dijelova.

1. Pravokutan paralelogram (pravokutnik) analogan je pravokutnom paralelepipedu (kvadru). Odnosi između stranica pravokutnika zaista nalikuju odnosima između ploha kvadra:

Svaka stranica pravokutnika usporedna je samo s jednom drugom stranicom, a okomita je na preostalim stranicama.

Svaka ploha kvadra usporedna je samo s jednom drugom plohom, a okomita je na preostalim plohama.

Stranicu ćemo dogovorno nazvati »međašnjim elementom« pravokutnika, a plohu na kvadru »međašnjim elementom« kvadra. Tada možemo predašnje dvije izjave stegnuti u jednu, koja je jednako primjenjiva na obje figure:

Svaki međašnji element usporedan je s jednim drugim međašnjim elementom, a okomit je na preostalim međašnjim elementima.

Na taj smo način izrazili izvjesne odnose koji su zajednički za dva skupa objekta koje međusobno uspoređujemo, za stranice pravokutnika i plohe kvadra. Analogija tih skupova sastoji se u tom što su odnosi u njima zajednički.

2. Analogija prožima čitavo naše mišljenje, naš svakidašnji govor i trivijalne zaključke, kao i umjetnička izražajna sredstva i najviša naučna dostignuća. Nivo njene upotrebe vrlo je nejednak. Često upotrebljavamo neodređene,

višeznačne, nepotpune ili nepotpuno razjašnjene analogije, no analogija može doseći i nivo matematičke preciznosti. U pronalaženju rješenja sve vrste analogije mogu biti važne, pa ne treba zanemariti nijednu.

3. Pokušavamo li riješiti neki zadatak, možemo biti zadovoljni ako nam uspije otkriti jednostavniji analogni zadatak. U § **15.** prvobitni zadatak odnosio se na dijagonalu kvadra; razmatranje jednostavnijeg analognog zadatka o dijagonali pravokutnika vodilo nas je k rješenju prvobitnog zadatka. Ovdje ćemo razmotriti još jedan slučaj te vrste. Zadatak glasi:

Odredi težište homogenog tetraedra!

Bez znanja integralnog računa i uz oskudno poznavanje fizike ovaj zadatak nipošto nije lak; u doba Arhimeda i Galileia bijaše to ozbiljan naučni problem. Stoga se moramo, ako želimo riješiti ovaj zadatak sa što manje predznanja, obazreti za jednostavnijim analognim zadatkom. Jasno je da će tu iskrsnuti odgovarajući planimetrijski zadatak:

Odredi težište homogenog trokuta!

Umjesto jednog pitanja imamo sada dva. No na dva pitanja bit će možda lakše odgovoriti nego na jedno, uz uvjet da su oba pitanja pametno povezana.

4. Mi ćemo privremeno ostaviti po strani svoj prvobitni zadatak o tetraedru i koncentrirati se na jednostavniji i analogni zadatak o trokutu. Da bismo riješili taj zadatak, moramo znati nešto o težištu. Plauzibilan i prirodan jest ovaj princip:

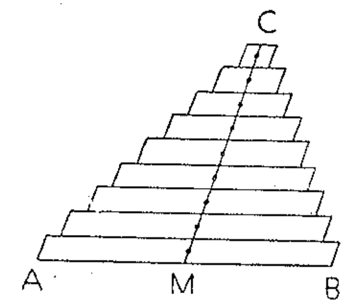
Sastoji li se neki sistem masa S od dijelova kojima sva težišta leže u istoj ravnini, tada ta ravnina sadrži i težište čitavog sistema S.

Ovaj princip daje sve što nam je potrebno u slučaju trokuta. On ponajprije sadrži činjenicu da težište trokuta leži u ravnini toga trokuta. Zatim ćemo trokut smatrati sastavljenim od vlakanaca (vrlo tankih pruga, »beskonačno uskih« paralelograma) paralelnih s izvjesnom stranicom trokuta (na sl. 7 sa stranicom $\overline{AB}$). Težište svake takve pruge

jest, očito, njeno središte, a sva ta središta leže na dužini koja spaja vrh C s polovištem M stranice $\overline{AB}$ (vidi sl. 7).

Bilo koja ravnina koja prolazi težišnicom $\overline{CM}$ trokuta sadrži težišta svih paralelnih pruga od kojih se sastoji trokut. Tako dolazimo do zaključka da i težište čitavog trokuta leži na toj istoj težišnici. No to težište mora isto tako ležati i na ostalim dvjema težišnicama, pa prema tome ono mora biti *zajedničko sjecište svih triju težišnica.*

Poželjno je da se sad čisto geometrijski, neovisno o bilo kakvoj mehaničkoj pretpostavci, dokaže da se sve tri težišnice sijeku u istoj tački.



Sl. 7.

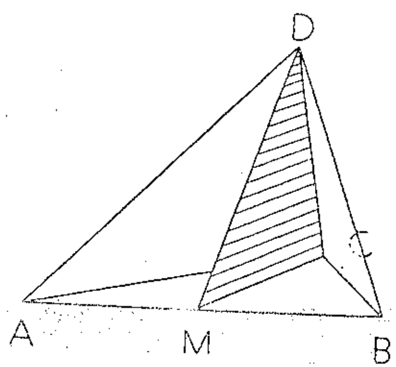
5. Nakon slučaja trokuta slučaj tetraedra prilično je lak. Mi smo malo prije riješili zadatak koji je analogan našem danom zadatku i time dobili *uzor po kojemu se možemo ravnati.*

Rješavajući analogni zadatak, koji nam sad služi kao uzor, zamišljali smo trokut ABC sastavljen od vlakanaca paralelnih sa stranicom $\overline{AB}$. Sad ćemo tetraedar $ABCD$ shvatiti sastavljenim od vlakanaca koja su paralelna s bridom $\overline{AB}$.

Središta vlakanaca koja tvore trokut leže sva na istoj dužini, na težišnici trokuta koja spaja polovište M stranice $\overline{AB}$ sa suprotnim vrhom C. Središta vlakanaca koja tvore tetraedar leže sva u istoj ravnini, a ta je ravnina određena polovištem M brida $\overline{AB}$ i suprotnim bridom $\overline{CD}$ (vidi sl. 8). Tu ravninu možemo nazvati *težišnom ravninom* tetraedra.

U slučaju trokuta imali smo tri težišnice, od kojih je jedna bila $\overline{MC}$. Svaka je morala sadržavati težište trokuta. Prema tome su se sve tri težišnice morale sjeći u jednoj tački, u težištu. U slučaju tetraedra imamo šest težišnih ravnina (od kojih je jedna MCD), koje prolaze polovištem jednog brida i suprotnim bridom. Svaka mora sadržavati težište tetraedra. Prema tome se svih šest težišnih ravnina moraju sjeći u jednoj tački, upravo u težištu.

6. Tako smo riješili zadatak o težištu homogenog tetraedra. Da svoje rješenje upotpunimo, poželjno je da čisto geometrijski, nezavisno od mehaničkih razmatranja, dokažemo da šest težišnih ravnina prolaze istom tačkom.



Sl. 8.

Kad smo bili riješili zadatak o težištu homogenog trokuta, spomenuli smo da je poželjno, radi potpunosti rješenja, naknadno dokazati da tri težišnice trokuta prolaze istom tačkom. Taj je zadatak analogan prethodnom, ali je očito jednostavniji.

Opet možemo, da bismo riješili zadatak o tetraedru, upotrijebiti jednostavniji analogni zadatak o trokutu. (Ovdje ćemo pretpostaviti da je taj jednostavniji zadatak već rije-

šen.) Promatraj tri težišne ravnine koje prolaze bridovima $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ iz vrha D. Svaka od tih ravnina prolazi i polovištem suprotnog brida (težišna ravnina položena bridom $\overline{DC}$ prolazi tačkom M, vidi sl. 8). Te tri težišne ravnine sijeku trokut ABC u trima težišnicama tog trokuta. Ove tri težišnice prolaze istom tačkom (što je rezultat jednostavnijeg analognog zadatka), i ta je tačka, kao i tačka D, zajednička tačka triju težišnih ravnina. Pravac koji spaja obje zajedničke tačke zajednički je svima trim težišnim ravninama.

Dokazali smo da one tri (od ukupno šest) težišne ravnine koje prolaze vrhom D imaju zajednički pravac. Isto mora vrijediti za one tri težišne ravnine koje prolaze tačkom A, a također i za tri težišne ravnine koje prolaze tačkom B, odnosno C. Ako te činjenice zgodno povežemo, možemo dokazati da šest težišnih ravnina imaju zajedničku tačku. (Tri težišne ravnine koje prolaze stranicama trokuta ABC određuju zajedničku tačku i tri presječnice koje se sijeku u toj zajedničkoj tački. Prema onom što smo malo prije dokazali mora svakom presječnicom prolaziti jedna daljnja težišna ravnina.)

7. Mi smo i pod 5. i pod 6. upotrijebili jednostavniji analogni zadatak o trokutu kako bismo riješili zadatak o tetraedru. No ipak, ta se oba slučaja razlikuju u nečem važnom. U prvom smo slučaju primijenili *metodu* jednostavnijeg analognog zadatka oponašajući mu rješavanje korak po korak. U drugom smo slučaju primijenili *rezultat* jednostavnijeg analognog zadatka, a nismo se brinuli o tome kako je dobiven taj rezultat. Katkad ćemo možda moći upotrijebiti *i metodu i rezultat* jednostavnijeg analognog zadatka. To se razabire čak i u našem prethodnom primjeru, ako razmatranja pod 5. i 6. shvatimo kao razne dijelove rješavanja istog zadatka.

Naš je primjer tipičan. Rješavajući postavljeni zadatak, često možemo upotrijebiti rješenje jednostavnijeg analognog zadatka; možemo možda upotrijebiti metodu rješavanja ili rezultat zadatka, ili oboje. Dakako, u težim slučajevima mogu nastati komplikacije, koje se u našem primjeru nisu pokazale. Specijalno se može dogoditi da se rješenje analognog zadatka ne može odmah iskoristiti za potrebe prvobitnog zadatka. U tom se slučaju isplati da ponovo razmatramo rješenje, da ga variramo i modificiramo, dok najzad, pošto smo iskušali razne oblike rješenja, ne nađemo rješenje koje se može protegnuti na naš prvobitni zadatak.

8. Poželjno je da rezultat ili bar neke konture rezultata predvidimo donekle plauzibilno. Takva plauzibilna predviđanja često se temelje na analogiji. Tako, na primjer, možemo znati da se težište homogenog trokuta podudara s težištem njegovih triju vrhova (tj. triju materijalnih tačaka jednakih masa, smještenih u vrhovima trokuta). Ako to znamo, možemo naslućivati da će se težište homogenog tetraedra podudarati s težištem njegovih četiriju vrhova.

To naslućivanje jest »zaključivanje po analogiji«. Budući da znamo da se trokut i tetraedar u mnogo pogleda vladaju jednako, naslućujemo da će se vladati jednako i u nekom daljnjem pogledu. Bilo bi nerazumno plauzibilnost takvih slutnji smatrati nečim sigurnim, ali bi bilo jednako nerazumno, pa čak i nerazumnije, kad uopće ne bismo uzimali u obzir takve plauzibilne slutnje.

Zaključivanje po analogiji čini se da je najčešća vrsta zaključivanja, a možda je najbitnija. Ono nam daje više ili manje plauzibilne slutnje koje možemo potvrditi ili ne potvrditi iskustvom i strožim zaključivanjem. Kemičar koji eksperimentira na životinjama da bi predvidio djelovanje svojih preparata na ljude zaključuje po analogiji. Tako je zaključivao i mališan koji je pitao kad su njegovo psetance morali odvesti veterinaru:

»Što je to veterinar?«

»Liječnik za životinje.«

»Koja životinja je liječnik za životinje?«

9. Zaključak po analogiji na temelju mnogih paralelnih slučajeva jači je od takva zaključka na temelju svega nekoliko slučajeva. Ipak je tu kvalitet važniji od kvantiteta. Oštro određene analogije pretežu nad nejasnim sličnostima, sistematski sređeni primjeri vrijede više od nasumce nabacane hrpe slučajeva.

Malo prije (pod 8) iznijeli smo jednu slutnju o težištu tetraedra. Ona se oslanjala na analogiju; slučaj tetraedra analogan je slučaju trokuta. Tu slutnju možemo pojačati razmatranjem još jednog analognog slučaja, i to slučaja homogene šipke (tj. dužine jednolike gustoće).

Analogija koju pokazuju

dužina   trokut   tetraedar

ima više aspekata. Dužina se nalazi na pravcu, trokut u ravnini, tetraedar u prostoru. Dužine su najjednostavnije jednodimenzionalne omeđene figure, trokuti su najjednostavniji poligoni, a tetraedri najjednostavniji poliedri.

Dužina ima 2 nuldimenzionalna međašnja elementa (2 krajnje tačke), a unutrašnjost joj je jednodimenzionalna.

Trokut ima 3 nuldimenzionalna i 3 jednodimenzionalna međašnja elementa (3 vrha, 3 stranice), a unutrašnjost mu je dvodimenzionalna.

Tetraedar ima 4 nuldimenzionalna, 6 jednodimenzionalnih i 4 dvodimenzionalna međašnja elementa (4 vrha, 6 bridova, 4 plohe), a unutrašnjost mu je trodimenzionalna.

Ove brojeve možemo skupiti u tablicu. Stupci u toj tablici sadrže po redu brojeve za nul-, jedno-, dvo- i trodimenzionalne elemente, a reci sadrže brojeve za dužinu, trokut i tetraedar:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Dovoljno je nešto malo znati o binomnom teoremu pa da u tim brojevima prepoznamo odsječak Pascalova [Paskal] trokuta. Tako smo došli do značajne pravilnosti kod dužine, trokuta i tetraedra.

10. Ako smo spoznali da su objekti koje uspoređujemo tijesno povezani, onda za nas mogu nešto značiti »zaključci po analogiji«, kao što su ovi što slijede.

Težište homogene dužine podudara se s težištem njenih krajnjih tačaka. Težište homogenog trokuta podudara se s težištem njegovih triju vrhova. Zar da ne naslutimo da će se težište homogenog tetraedra podudarati s težištem njegovih četiriju vrhova?

Dalje: težište homogene dužine dijeli razmak njenih krajnjih tačaka u omjeru 1 : 1, a težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1. *Zar* da ne naslutimo da će težište homogenog tetraedra dijeliti udaljenost od ma kojeg vrha do težišta suprotne plohe u omjeru 3 : 1?

Bilo bi krajnje nevjerojatno da slutnje u tim pitanjima budu pogrešne, da tako lijepa pravilnost bude upropaštena. Osjećaj da jednostavan harmoničan red ne može varati vodi istraživača i u matematici i u ostalim naukama, a izražen je u latinskoj poslovici: *simplex sigillum veri* (jednostavnost je pečat istine).

[Ovo što smo malo prije rekli sugerira protezanje na n dimenzija. Čini se nevjerojatnim da bi ono što vrijedi za prve tri dimenzije, za $n = 1, 2, 3$, prestalo vrijediti za veće vrijednosti od n. Ovo naslućivanje jest »zaključivanje indukcijom«. Ono pokazuje da se indukcija prirodno temelji na analogiji. Vidi INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA.]

[11. Završit ćemo ovaj članak kratkim razmatranjem najvažnijih slučajeva gdje analogija postiže preciznost matematičkih ideja.

(I) Dva sistema matematičkih objekata, recimo S i S', povezana su međusobno tako da izvjesni odnosi između objekata sistema S podliježu istim zakonima kao i odnosi između objekata sistema S'.

Ovu smo vrstu analogije između S i S' pokazali razmatranjima pod 1. Sistem S čine stranice pravokutnika, S' plohe kvadra.

(II) Postoji obostrano jednoznačno pridruživanje između objekata dvaju sistema S i S', pri kome ostaju sačuvani izvjesni odnosi. To znači: ako takav odnos postoji između objekata jednog sistema, isti odnos postoji između odgovarajućih objekata drugog sistema. Takva veza između dva sistema jest vrlo određena vrsta analogije. Zove se izomorfizam (ili holoedarski izomorfizam).

(III) Postoji jednostrano jednoznačno pridruživanje između objekata dvaju sistema S i S', pri kome ostaju sačuvani

izvjesni odnosi. Takva veza (koja je važna u raznim granama više matematike, naročito u teoriji grupa — u što ovdje ne možemo ulaziti) zove se meroedarski izomorfizam (ili homomorfizam; homeomorfizam bi možda bio bolji izraz). Meroedarski izomorfizam možemo smatrati jednom drugom vrlo određenom vrstom analogije.]

Bolzano, Bernhard [Bolcano B.] (1781—1848), logičar i matematičar, posvetio je znatan dio svoga opsežnog izlaganja logike (»Wissenschaftslehre«) heuristici (sv. 3, str. 293—575). O tom dijelu svog rada on piše: »Nipošto ne mislim da ću ovdje moći dati neki postupak za istraživanje koji ne bi svaka dobra glava već odavna bila zapazila, i nikom ne obećajem da će ovdje naići na nešto posve novo u tom pogledu. Ja ću se samo potruditi da jasnim riječima obuhvatim razna pravila i načine istraživanja po kojima postupaju svi sposobni ljudi, a da većinom nisu toga ni svjesni. Pa iako ne utvaram sebi da će i to potpuno uspjeti, ipak se nadam da će i ono malo što ću ovdje dati nekome dobro doći i da će to kasnije moći primijeniti.«

Budući matematičar treba da umije spretno rješavati zadatke. No to nije sve. Kad dođe pravo vrijeme, on mora rješavati značajnije matematičke zadatke, a u prvom redu treba da pronađe koja vrsta zadataka osobito odgovara njegovu prirođenom daru.

Za nj je najvažniji dio rada: osvrnuti se na gotovo rješenje. Pregledavajući tok svoga rada i konačni oblik rješenja, on će zapaziti vrlo mnogo raznih stvari. Razmislit će, na primjer, o težini riješenog zadatka i o odlučnoj ideji; pokušat će ustanoviti što ga je kočilo, a što mu je najzad pomoglo. On će tražiti i jednostavne intuitivne ideje: *Možeš li rezultat uočiti na prvi pogled?* Razvit će razne metode i uspoređivati: *Možeš li rezultat izvesti drugačije?* On će pokušati da svoj zadatak još jače rasvijetli uspoređujući ga sa zadacima koji su već ranije riješeni. Pokušat će da izmisli nove zadatke koje bi mogao riješiti na temelju rada što ga je upravo završio: *Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi* *zadatak?* Ako on što je moguće potpunije razmišlja o zadacima koje je riješio, steći će sređeno i upotrebljivo znanje.

Kao i svatko, tako i budući matematičar uči oponašajući i vježbajući. On treba da sebi potraži pravi uzor u koga će se ugledati. Potrebno je da promatra nastavnika koji stimulira. Neka se takmiči sa sposobnim prijateljem. A zatim, što je možda najvažnije, neka ne čita samo uobičajene, službene udžbenike, već i dobre autore, dok ne nađe jednoga čiji će stil po svojoj prirođenoj sklonosti moći da oponaša. Neka uživa i neka probire ono što mu se čini jednostavno, ili poučno, ili lijepo. Neka rješava zadatke, neka izabire one koji zadiru u njegov krug zanimanja, neka razmišlja o njihovu rješenju i neka sam izmišlja nove zadatke. Na taj način, a i drugim sredstvima, neka nastoji ostvariti svoje prvo važno otkriće: da otkrije što voli, a što ne voli, svoj ukus, svoj vlastiti smjer.

Čemu dokazi? O Newtonu se pripovijeda: Kao mladi student započeo je studij geometrije čitanjem Euklidovih »Elemenata«, kako je to bio običaj u njegovo doba. Čitao je teoreme, vidio da su ispravni, i preskakao je dokaze. Pitao se zašto se treba mučiti dokazivanjem tako evidentnih stvari. Ipak, poslije mnogo godina promijenio je mišljenje i hvalio Euklida.

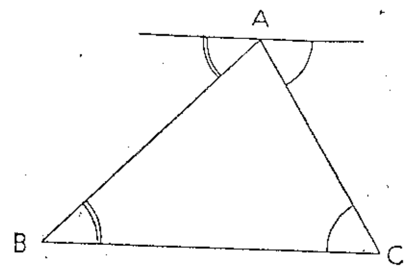
Bez obzira na autentičnost ovoga, ipak ostaje pitanje: zašto treba da dokaze učimo odnosno poučavamo? Što je bolje: uopće nikakvi dokazi, ili dokazi za sve, ili neki dokazi? Ako samo neki, onda koji?

1. *Potpuni dokazi.* Za logičara izvjesnog tipa postoje samo potpuni dokazi. Ono za što hoćemo da bude dokaz ne smije ostaviti nikakve praznine, nijednu »rupu«, ništa neizvjesno. Inače to nije dokaz. Možemo li potpunih dokaza koji udovoljavaju tako visokim zahtjevima naći u svakidašnjem životu, ili u kaznenom postupku, ili u fizici? Jedva. Prema tome teško je shvatiti kako se moglo doći do ideje takvog strogo potpunog dokaza.

Možemo kazati, ponešto pretjerujući, da je čovječanstvo tu ideju dobilo od jednog čovjeka i jedne knjige: od Euklida i njegovih »Elemenata«. U svakom slučaju studij elemenata planimetrije još je uvijek najbolja prilika da se usvoji ideja strogog dokaza.

Uzmimo kao primjer dokaz teorema: *U svakom je trokutu suma triju kutova jednaka 2R*[1]. Slici 9, koja je neotuđivo duhovno vlasništvo većine nas, ne treba mnogo objašnjenja. Vrhom A povučena je paralela sa stranicom $\overline{BC}$. Kutovi kod B i C jednaki su izvjesnim kutovima kod A (kako je to istaknuto na slici) jer su izmjenični kutovi međusobno jednaki. Tri kuta trokuta jednaka su trima kutovima sa zajedničkim vrhom A koji tvore ispruženi kut ili $2R$. Time je teorem dokazan.

Ako je učenik završio svoje učenje matematike, a nije stvarno shvatio nekoliko dokaza poput ovog prethodnog, on ima pravo da oštro predbaci svojoj školi i svojim nastavnici-



Sl. 9.

ma. Potrebno je razlikovati važnije stvari od manje važnih. Ako učeniku nije uspjelo da upozna ovu ili onu specijalnu geometrijsku činjenicu, on nije previše propustio; u kasnijem će životu malo moći da primijeni takve činjenice. No ako mu nije uspjelo da se upozna s geometrijskim dokazima, propustio je najbolje i najjednostavnije primjere pravilnog dokazivanja i promašio najbolju priliku da usvoji ideju strogog zaključivanja. Bez te ideje on neće imati pravo mjerilo kojim bi mogao uspoređivati svakojake tvrdnje i tobožnje dokaze na koje će u životu nailaziti.

---

[1] Dio 32. propozicije u I knjizi Euklidovih *»Elemenata«*. Slijedeći dokaz nije Euklidov, no Grci su ga znali.

Ukratko: ako opće obrazovanje hoće da učeniku dâ ideje intuitivne očevidnosti i logičkog zaključivanja, mora biti mjesta za geometrijske dokaze.

2. *Logički sistem.* Geometrija, kako je prikazana u Euklidovim »Elementima«, nije puka zbirka činjenica, već logički sistem. Aksiomi, definicije i propozicije ne ređaju se nasumce, već su razmješteni u savršenom redu. Svaka je propozicija smještena tako da se može temeljiti na prethodnim aksiomima, definicijama i propozicijama. Raspored propozicija možemo smatrati glavnim Euklidovim dostignućem, a njihov logički sistem kao najveću vrijednost »Elemenata«.

Euklidova geometrija nije samo logički sistem već i prvi i najveći primjer takva sistema koji su druge nauke pokušavale oponašati i još pokušavaju. Treba li da i druge nauke — osobito one koje su daleko od geometrije, kao psihologija i pravne nauke — oponašaju Euklidovu strogu logiku? O tom se može debatirati, no nitko tko ne pozna Euklidov sistem nije ovlašten da sudjeluje u toj debati.

Sistem geometrije cementiran je dokazima. Svaka je propozicija dokazima vezana za prethodne aksiome, definicije i propozicije. Ne možemo shvatiti pravu bit sistema ako ne shvatimo takve dokaze.

Ukratko: ako opće obrazovanje hoće učeniku dati ideju logičkog sistema, mora biti mjesta za geometrijske dokaze.

3. *Mnemotehnički sistem.* Autor ne misli da su ideje intuitivne očevidnosti, strogog zaključivanja i logičkog sistema ikome suvišne. No možda ima slučajeva kad — zbog pomanjkanja vremena ili iz drugih razloga — studij tih ideja ne treba smatrati apsolutno potrebnim. Međutim, i u takvim slučajevima dokazi mogu biti poželjni.

Dokazi daju očevidnost; time povezuju logički sistem i pomažu da se sjetimo raznih detalja koji spadaju zajedno. Uzmimo naš primjer, koji je u vezi sa slikom 9. Ta slika jasno izražava činjenicu da je suma kutova u trokutu 180^0. Slika povezuje tu činjenicu s drugom činjenicom, tj. s činjenicom da su izmjenični kutovi međusobno jednaki. Povezane činjenice interesantnije su i lakše se pamte od izoliranih činjenica. Tako ova slika učvršćuje u našoj svijesti oba povezana geometrijska teorema, pa najzad i slika i teoremi postaju naše neotuđivo duhovno vlasništvo.

A sada dolazimo do slučaja kad se ne smatra nužnim stjecanje općih ideja, već je poželjno samo stjecanje izvjesnih činjenica. Pa i u takvu slučaju treba da su činjenice iznesene u nekoj vezi i po nekakvom sistemu jer se izolirane činjenice mučno stječu i lako zaboravljaju. Bilo kakva veza koja združuje činjenice jednostavno, prirodno i trajno ovdje je dobrodošla. Sistem se ne mora temeljiti na logici, njemu mora biti svrha samo to da uspješno pomogne pamćenju; on treba da bude ono što se naziva *mnemotehničkim* sistemom. Pa ipak, i sa stajališta čisto mnemotehničkog sistema dokazi mogu biti korisni, naročito jednostavni dokazi. Na primjer, učenik treba da usvoji činjenicu o sumi kutova u trokutu i drugu činjenicu o izmjeničnim kutovima. Može li ikoja doskočica za pamćenje tih činjenica biti jednostavnija, prirodnija ili efikasnija od slike 9?

Ukratko: ako se čak i ne pridaje neka naročita važnost općim logičkim idejama, dokazi mogu biti korisni kao mnemotehničko sredstvo.

4. Sistem *»kuharice«.* Iznijeli smo prednosti dokaza, ali se zacijelo ipak ne zalažemo za to da bi sve dokaze trebalo dati »in extenso«. Naprotiv, ima slučajeva gdje će jedva biti moguće da se tako postupa; značajan slučaj jest nastava diferencijalnog i integralnog računa za buduće inženjere.

Treba li dati infinitezimalni račun prema današnjim zahtjevima strogosti, potrebni su dokazi koji su donekle teški i suptilni (»epsilon-dokazi«). Međutim, inženjeri uče infinitezimalni račun radi njegove primjene te nemaju dovoljno ni vremena, ni predvježbe, ni interesa da se bore s dugim dokazima i da paze na suptilnosti. Tako nastaje veliko iskušenje da se izostave svi dokazi. No, time se infinitezimalni račun srozava na nivo »kuharice«.

»Kuharica« detaljno opisuje sastojke jela i postupke, ali ne dokazuje svoje upute niti obrazlaže svoje recepte. Dokaz za puding sastoji se u tome što ga jedemo. »Kuharica« može potpuno služiti svojoj svrsi. Ona zaista ne treba da ima nikakav logički ili mnemotehnički sistem jer su svi recepti napisani ili odštampani, i ne treba ih pamtiti.

Ipak, autor udžbenika infinitezimalnog računa i nastavnik teško će ostvariti svoje namjere ako se kruto povode za sistemom »kuharice«. Ako izlažu postupke bez dokaza, nemotivirani postupci neće biti shvaćeni. Daju li pravila bez obrazloženja, nepovezana pravila brzo će se zaboraviti. Matematika se ne može kušati na posve isti način kao puding. Ako je spriječeno svako zaključivanje, kurs diferencijalnog i integralnog računa lako će postati nesuvisli inventar neprobavljivih podataka.

5. *Nepotpuni dokazi.* Najbolji način da se svlada dilema između preteških dokaza i nivoa »kuharice« jest razumna upotreba nepotpunih dokaza.

Za strogog logičara nepotpun dokaz nije uopće dokaz. I mi svakako moramo nepotpune dokaze pomno razlikovati od potpunih. Pobrkati ih — loše je, podvaliti jedan umjesto drugog — još je gore. Mučno je kad autor udžbenika iznosi neki nepotpun dokaz s vidljivim krzmanjem između stida i pretenzije da dokaz bude potpun. Nepotpuni dokazi mogu ipak biti korisni ako se upotrijebe na pravom mjestu i s ukusom. Njima nije cilj da nadomjeste potpune dokaze, što oni nikad ne mogu, već da izlaganje učine zanimljivim i suvislijim.

Prvi primjer. *Algebarska jednadžba n-tog stepena ima tačno n korijena.* Ovaj stavak, nazvan Gaussov osnovni teorem algebre, često moramo iznijeti učenicima koji su potpuno nepripravni za razumijevanje njegova dokaza. Međutim, oni znaju da *jednadžba prvog stepena ima jedan korijen,* a *jednadžba drugog stepena dva korijena.* Osim toga, taj teški stavak ima jedan dio koji se lako može pokazati: *nijedna jednadžba n-tog stepena nema više od n različitih korijena.* Tvore li spomenute činjenice potpun dokaz osnovnog teorema? Nipošto. Ipak, one su dovoljne da mu daju izvjesnu zanimljivost i vjerodostojnost i — što je najvažnije — da ga učvrste u svijesti učenika.

Drugi primjer. *Suma bilo kojih dvaju bridnih kutova trostranog prostornog ugla veća je od trećeg kuta.* Očito izlazi

na to da teorem tvrdi: *u sfernom je trokutu suma bilo kojih dviju stranica veća od treće.* Opazimo li to, prirodno je da pomišljamo na analogiju sfernog trokuta s ravnim. Čine li ove primjedbe dokaz? Nipošto. No one nam pomažu da shvatimo i upamtimo dani teorem.

Naš je prvi primjer historijski interesantan. Oko 250 godina smatrali su matematičari osnovni teorem algebre istinitim bez potpunog dokaza. Zapravo nisu imali mnogo više temelja nego što je bilo malo prije spomenuto. Naš drugi primjer ukazuje na ANALOGIJU kao na važan izvor naslućivanja. U matematici, fizici i u prirodnim naukama uopće otkrića često polaze od promatranja, analogije i indukcije. Ova sredstva, upotrijebljena s ukusom pri sastavljanju plauzibilnog heurističkog dokaza, osobito su interesantna za fizičara i inženjera. (Vidi također INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA, 1, 2, 3.)

Ulogu i korist nepotpunih dokaza objašnjava donekle naš studij procesa rješavanja. Iskustvo u rješavanju zadataka pokazuje da je prva ideja dokaza vrlo često nepotpuna. Bitna napomena, glavna veza, klica dokaza je tu, ali se naknadno moramo pobrinuti za detalje koji su često neprilični. Neki, iako ne mnogi, autori imaju dara da prikažu upravo jezgru dokaza, glavnu ideju u njenom najjednostavnijem obliku, a da bit preostalih detalja samo naznače. Takav dokaz, iako nepotpun, može biti mnogo instruktivniji od dokaza koji je izveden sa svim detaljima.

Ukratko: nepotpune dokaze možemo upotrebljavati kao neke vrste mnemotehničkog pomagala (samo svakako ne umjesto potpunih dokaza) ako nam je cilj ne strogo logička dosljednost, već izvjesna suvislost u izlaganju.

Vrlo je opasno zagovarati nepotpune dokaze. Međutim, moguće se zloupotrebe pomoću nekoliko pravila mogu zadržati u određenim granicama. Prvo, ako je dokaz nepotpun, treba negdje i nekako da kao takav bude označen. Drugo, autor odnosno nastavnik nemaju pravo da iznose nepotpun dokaz nekog teorema ako ne znaju vrlo dobro i njegov potpun dokaz.

Najzad, valja priznati da nije nipošto lako prikazati nepotpun dokaz s dovoljno ukusa.

Da li je moguće zadovoljiti uvjet? *Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice? Ili nije dovoljan? Možda je preodređen? Ili kontradiktoran?*

Ova su pitanja često korisna u početnoj fazi rada kad ona još ne zahtijevaju konačan odgovor, već ih zadovoljava privremen odgovor, slutnja. Primjeri u §§ **8, 18.**

Dobro je predvidjeti svaku karakterističnu crtu rezultata za koji radimo. Imamo li neku predodžbu o tome što možemo očekivati, znat ćemo bolje kojim nam smjerom valja ići. Jedna od važnih karakteristika zadatka jest broj rješenja što ih taj zadatak dopušta. Najzanimljiviji su zadaci oni koji dopuštaju upravo jedno rješenje. Mi smo skloni tome da zadatke s jednim jedinim rješenjem smatramo kao jedino »razumne« zadatke. Je li naš zadatak u tom smislu »razuman«? Umijemo li odgovoriti na to pitanje, pa makar to bilo i plauzibilnim naslućivanjem, porast će naš interes za zadatak, i mi ćemo moći bolje raditi.

Je li naš zadatak »razuman«? To je pitanje korisno u početnoj fazi rada *ako* možemo na nj lako odgovoriti. Naprotiv, ako se teško može odgovoriti na to pitanje, mogli bismo se više namučiti nego okoristiti. Isto vrijedi za pitanje »*Da li je moguće zadovoljiti uvjet?*« kao i za pitanja koja se u našoj tabeli na to nadovezuju. Valja ih postaviti jer odgovor može biti lak i plauzibilan, ali ne valja na njima inzistirati ako se čini da bi odgovor mogao biti težak ili nejasan.

Odgovarajuća pitanja za »dokazne zadatke« glase: *Da li je vjerojatno da je teorem istinit? Ili je vjerojatnije da je pogrešan?* Način na koji je pitanje postavljeno jasno pokazuje da se očekuje samo slutnja, plauzibilan privremen odgovor.

Da li si iskoristio sve zadano? Budući da u toku rješavanja postepeno mobiliziramo sve više znanja, svoj ćemo zadatak na kraju razumjeti mnogo bolje nego na početku (NAPREDAK I DOSTIGNUĆE, 1). No kako je sada? Imamo li što nam treba? Je li naše shvaćanje zadatka adekvatno? *Da li si iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet?* Odgovarajuće pitanje kod »dokaznog zadatka« bilo bi: *Jesi li iskoristio čitavu pretpostavku?*

1. Radi ilustracije vratit ćemo se na zadatak o kvadru koji smo postavili u § **8**, a pratili ga dalje u §§ **10**, **12**, **14**, **15**. Može se dogoditi da neki učenik dođe na pomisao da računa dijagonalu međašnje plohe, $\sqrt{a^2+b^2}$, no tada zapne. Nastavnik mu može pomoći pitanjem: *Da li si iskoristio sve zadano?* Učenik će zacijelo opaziti da izraz $\sqrt{a^2+b^2}$ ne sadrži treću zadanu veličinu c. Stoga treba da pokuša da je uvede. Imat će dakle dobru priliku da opazi odlučujući pravokutni trokut, kome su katete $\sqrt{a^2+b^2}$ i c, a hipotenuza mu je tražena dijagonala kvadra. (Daljnju ilustraciju vidi u članku: POMOĆNI ELEMENTI, 3.)

Pitanja tabele koja se ovdje pretresaju vrlo su važna. U prethodnom smo primjeru jasno pokazali njihovu primjenu u konstrukciji rješenja. Ta nam pitanja mogu pomoći da otkrijemo slabo mjesto u svojoj koncepciji zadatka. Mogu nas upozoriti na element kojeg nema. Ako znamo da nekog elementa još nema, jasno je da ćemo ga pokušati uvesti. Na taj način imamo nit, imamo određenu liniju istraživanja, kojom moramo ići, pa ima izgleda da ćemo naići na odlučujuću ideju.

2. Naša pitanja ne pomažu samo kad izgrađujemo dokaz, već i onda kad ga kontroliramo. Uzmimo konkretno da moramo kontrolirati dokaz nekog teorema kome se pretpostavka sastoji od tri dijela, a sva su tri dijela bitna za ispravnost teorema. To znači: izostavimo li ma koji dio pretpostavke, teorem neće više biti valjan. Stoga mora dokaz biti pogrešan ako je u njemu zanemaren bilo koji dio pretpostavke. Jesi li u dokazu *iskoristio čitavu pretpostavku?* Gdje je upotrijebljen prvi dio pretpostavke? Gdje je upotrijebljen drugi dio? Gdje treći? Odgovarajući na sva ta pitanja, kontroliramo dokaz.

Ovakva kontrola djelotvorna je i poučna, a za temeljito razumijevanje gotovo je neizbježivo potrebna ako je dokaz dug i težak — što INTELIGENTAN ČITALAC treba da zna.

3. Svrha je naših pitanja da ispitaju da li je naše shvaćanje zadatka potpuno. Naše je shvaćanje zadatka zacijelo nepotpuno ako nismo uzeli u obzir neki bitan dio zadanih elemenata, uvjeta ili pretpostavke. Međutim, ono će biti ne-

potpuno i onda ako nismo shvatili značenje nekog bitnog izraza. Stoga, da bismo ispitali svoje shvaćanje, moramo također pitati: *Jesi li uzeo u obzir sve bitne pojmove koji se nalaze u zadatku?* Vidi DEFINICIJA, 7.

4. Pri prethodnim napomenama moramo ipak biti oprezni. Postoji izvjesno ograničenje. Jednostavno ih možemo primijeniti samo na zadatke koji su »savršeno formulirani« i »razumni«.

Savršeno formuliran i razuman »odredbeni zadatak« mora sadržavati sve potrebne podatke i ni jedan jedini suvišan podatak. I uvjet zadatka mora biti upravo dovoljan, ne smije biti kontradiktoran, ne smije biti preodređen. Rješavajući takav zadatak, svakako moramo iskoristiti sve zadane podatke i čitav uvjet.

Objekt »dokaznog zadatka« jest matematički teorem. Ako je zadatak savršeno formuliran i razuman, svaka klauzula u pretpostavci mora za zaključnu tvrdnju biti bitna. Dokazujući takav teorem, svakako moramo iskoristiti svaku klauzulu pretpostavke.

Za matematičke se zadatke u tradicionalnim udžbenicima pretpostavlja da su savršeno formulirani i razumni. No ne bi se smjeli u to previše pouzdati. Ako i najmanje sumnjamo, treba da se zapitamo: DA LI JE MOGUĆE ZADOVOLJITI UVJET? Pokušavajući da odgovorimo na ovo ili slično pitanje, možemo se, bar donekle, uvjeriti da li je zadatak onoliko dobar koliko smo to pretpostavljali.

Pitanje koje je stavljeno kao naslov ovog članka i pitanja s njim u vezi mogu se i moraju neizmijenjena postavljati samo onda ako je dotični zadatak razuman i savršeno formuliran ili ako bar nemamo razloga posumnjati protivno.

5. Ima i nekih nematematičkih zadataka koji su u izvjesnom smislu »savršeno formulirani«. Na primjer, za dobre šahovske probleme pretpostavljamo da imaju samo jedno rješenje da na šahovskoj ploči nema nijedne suvišne figure, itd.

Međutim, PRAKTIČNI ZADACI obično su daleko od toga da budu savršeno formulirani. Za njih je potrebno da se ponovo temeljito razmotre pitanja iz ovog članka.

Da li si zadatak već prije vidio? Moguće je da smo isti zadatak, što ga sada moramo riješiti, već prije riješili, ili da smo o njemu čuli, ili pak da smo imali posve sličan zadatak. To su mogućnosti koje svakako valja istražiti. Nastojmo se sjetiti što je bilo! *Jesi li zadatak već prije vidio? Ili si isti zadatak vidio u nešto drugačijem obliku?* Ako odgovor bude i negativan, takva pitanja mogu izazvati mobilizaciju našega korisnog znanja.

Pitanje koje je naslov ovoga članka često se upotrebljava i u općenitijem značenju. Da dođemo do rješenja, moramo izvući iz svog pamćenja neke bitne elemente, moramo mobilizirati potrebne dijelove svoga uspavanog znanja (NAPREDAK I DOSTIGNUĆE). Dakako, mi ne možemo unaprijed tačno znati koji su dijelovi našeg znanja upravo sada važni, no postoje izvjesne mogućnosti koje treba svakako istražiti. Tako može svaka značajna pojedinost danog zadatka koja je imala neku ulogu u rješavanju nekog drugog zadatka imati ulogu i ovdje. Ako stoga uočimo da je neka značajna pojedinost sadašnjeg zadatka eventualno važna, pokušat ćemo je negdje prepoznati. Što ona znači? Je li ti poznata? *Jesi li je već prije vidio?*

Definicija nekog izraza je formulacija njegova značenja drugim izrazima za koje pretpostavljamo da su nam dobro poznati.

1. *Tehnički izrazi* u matematici su dvovrsni. Neke uzimamo kao jednostavne osnovne izraze i ne definiramo ih. Druge smatramo za izvedene izraze i propisno ih definiramo, tj. formuliramo njihovo značenje pomoću jednostavnih osnovnih izraza ili pomoću ranije definiranih izvedenih izraza. Tako, na primjer, ne dajemo formalnu definiciju osnovnih pojmova kao što su tačka, pravac i ravnina.[2] No dajemo for-

[2] U tom pogledu promijenili su se nazori od vremena Euklida i njegovih grčkih sljedbenika. Oni su definirali tačku, pravac i ravninu. Međutim, njihove »definicije« jedva da su formalne definicije, već su prije neka vrsta intuitivnih objašnjenja. Dakako da su takva objašnjenja dopuštena, a u nastavi su pače i vrlo poželjna.

malnu definiciju pojmova, kao što su »simetrala kuta«, »kružnica«, »parabola«.

Definiciju posljednjeg izraza možemo formulirati ovako: *Parabolom* nazivamo geometrijsko mjesto tačaka, koje su jednako udaljene od čvrste tačke i od čvrstog pravca. Čvrsta se tačka zove *fokus* ili žarište parabole, a čvrst pravac njena *direktrisa* ili ravnalica. Pri tom se samo po sebi razumije da svi ti elementi leže u jednoj čvrstoj ravnini i da čvrsta tačka (fokus) ne leži na čvrstom pravcu (direktrisi).

Ne pretpostavlja se da čitalac zna smisao definiranih izraza: parabola, fokus parabole, direktrisa parabole. Međutim, svakako se pretpostavlja da mu je poznato značenje svih ostalih izraza, kao što su: tačka, pravac, ravnina, udaljenost dviju tačaka, čvrst, geometrijsko mjesto itd.

2. *Definicije u rječnicima* vanjskim se oblikom ne razlikuju mnogo od matematičkih definicija, ali su prožete drugim duhom.

Pisac rječnika bavi se običnim, općenito prihvaćenim značenjem riječi. On *akceptira* takvo značenje i formulira ga što je moguće ljepše u obliku definicije.

Matematičar se ne bavi običnim značenjem svojih tehničkih izraza, bar primarno ne. Za njega je malo važno što »krug«, »parabola« ili drugi takvi tehnički izrazi znače ili ne znače u običnom, svakodnevnom govoru. Matematička definicija *stvara* matematičko značenje.

3. *Primjer.* Konstruiraj sjecište zadanog pravca i parabole kojoj su zadani fokus i direktrisa!

Naš pristup nekom zadatku ovisi svakako o stanju našeg znanja. Naš pristup ovom zadatku ovisi uglavnom o tome koliko poznajemo svojstva parabole. Znamo li o paraboli mnogo, pokušat ćemo to znanje upotrijebiti i izvući iz njega nešto korisno: *Znaš li koji teorem koji bi ti mogao pomoći? Znaš li neki srodni zadatak?* Znamo li o paraboli, fokusu, i direktrisi malo, ovi nas izrazi prilično zbunjuju, i prirodno je da ih se želimo otresti. Kako ćemo ih se otresti? Poslušajmo razgovor nastavnika i učenika o ovom zadatku! Oni su već odabrali *zgodne oznake:* P neka je jedno od nepoznatih sjecišta, F fokus, d direktrisa, c pravac koji siječe parabolu.

»A *što je nepoznato?*«

»Tačka P.«

»*Što je zadano?*«

»Pravci c, d i tačka F.«

»*Kako glasi uvjet?*«

»P je sjecište pravca c s parabolom, kojoj je direktrisa d, a fokus F.«

»Tako je! Ti si dosad, koliko znam, imao malo prilike da proučavaš parabolu, no mislim da bi znao reći što je parabola.«

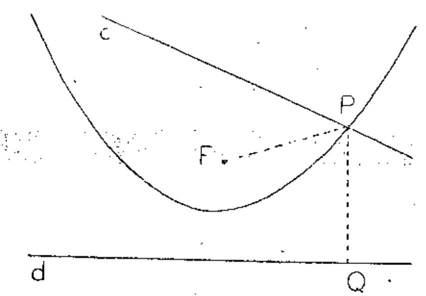
»Parabola je geometrijsko mjesto tačaka koje su jednako udaljene od fokusa i od direktrise.«

»Ispravno. Definicije se sjećaš tačno. To je dobro, ali mi je moramo i iskoristiti. *Vrati se na definiciju!* Što možeš na temelju definicije parabole kazati o svojoj tački P?«

»P leži na paraboli. Dakle je P tačka koja je jednako udaljena od d i od F.«

»Dobro! *Nacrtaj!*«

Učenik uvodi u sliku 10. dužine $\overline{PF}$ i $\overline{PQ}$, gdje mu PQ znači okomicu od P do d.



Sl. 10.

»No, *možeš li zadatak drugačije izraziti?*«

. . . . .

»Možeš li uvjet zadatka izraziti drugačije ako upotrijebiš dužine koje si upravo uveo?«

»P je tačka na pravcu c za koju je $\overline{PF} = \overline{PQ}$.«

»Dobro. Sad mi, molim te, reci riječima: Što je $\overline{PQ}$?«

»$\overline{PQ}$ je udaljenost od P do d.«

»Možeš li sad zadatak izraziti drugačije? Hajde, formuliraj ga lijepo u jasnoj, punoj rečenici!«

»Konstruiraj tačku P na zadanom pravcu c koja je jednako udaljena od zadane tačke F i zadanog pravca d!«

»Uoči napredak postignut od prvobitne formulacije do ove sadašnje! Prvobitna formulacija zadatka bila je puna nepoznatih tehničkih izraza: parabola, fokus, direktrisa. Zvučila je upravo pomalo pompozno i naduveno. A sad nije ništa ostalo od tih neobičnih tehničkih izraza. Učinio si da je tvoj zadatak „*splasnuo*". Tako valja!«

4. *Eliminacija tehničkih izraza* rezultat je rada u prethodnom primjeru. Pošli smo od formulacije zadatka u kojoj su bili izvjesni tehnički izrazi (parabola, fokus, direktrisa), a došli smo najzad do nove formulacije u kojoj tih izraza nema.

Da eliminiramo neki tehnički izraz, moramo znati njegovu definiciju. Međutim, nije dovoljno samo je znati, treba je i upotrijebiti. U prethodnom primjeru nije bilo dovoljno sjetiti se na definiciju parabole. Odlučan je korak bio kad smo u sliku uveli dužine $\overline{PF}$ i $\overline{PQ}$, koje su prema definiciji parabole jednake. To je tipičan postupak. Uvodimo zgodne elemente u koncepciju zadatka. Na temelju definicije uspostavljamo veze između uvedenih elemenata. Ako te veze u potpunosti izražavaju značenje tehničkog izraza, iskoristili smo definiciju. Iskoristivši definiciju tehničkog izraza, eliminirali smo taj izraz.

Postupak koji je upravo opisan mogli bismo nazvati: *vraćanje na definiciju.*

Vraćanjem na definiciju nekog tehničkog izraza oslobađamo se tog izraza, a u zamjenu uvodimo nove elemente i nove veze. Promjena u našoj koncepciji zadatka koja odatle proizlazi može biti važna. Na svaki će način rezultirati neka nova formulacija, neka VARIJACIJA ZADATKA.

5. *Definicije i poznati teoremi.* Ako znamo za naziv »parabola« i imamo neku neodređenu predodžbu o obliku te krivulje, a inače o njoj ništa drugo ne znamo, bit će naše znanje

očito nedovoljno za rješavanje zadatka koji je bio uzet kao primjer, ili za rješavanje ma kojeg drugog ozbiljnog geometrijskog zadatka o paraboli. Kakvo je znanje za to potrebno?

Naučnu zgradu geometrije možemo smatrati sagrađenom od aksioma, definicija i teorema. Među aksiomima koji se bave samo takvim osnovnim izrazima kao što su tačka, pravac itd. ne spominje se parabola. U ma kojem geometrijskom dokazu o paraboli, u rješenju ma kojeg zadatka gdje dolazi parabola, moramo upotrijebiti ili definiciju parabole ili neke teoreme o njoj. Da bismo riješili takav zadatak, moramo znati bar definiciju, ali je bolje da znamo još i neke teoreme.

Dakako da ono što smo rekli za parabolu vrijedi i za svaki izveden pojam. Na početku rješavanja nekog zadatka koji sadrži takav pojam ne možemo još znati što će biti bolje da se upotrijebi: definicija pojma ili neki teorem o njemu. No sigurno je da ćemo morati upotrijebiti jedno ili drugo.

Ipak, ima slučajeva gdje ne možemo birati. Znamo li tek definiciju pojma i ništa više, prisiljeni smo upotrijebiti definiciju. Ne znamo li mnogo više od definicije, bit će najbolje da se vratimo na definiciju. Međutim, ako znamo mnogo teorema o pojmu i vrlo smo iskusni u njihovoj primjeni, ima izvjesnih izgleda da ćemo posegnuti za prikladnim teoremom koji sadrži taj pojam.

6. *Više definicija.* Kuglina se ploha obično definira kao geometrijsko mjesto tačaka koje imaju zadanu udaljenost od zadane čvrste tačke. (Tačke su sad u prostoru i nisu više vezane na ravninu.) No, kuglina bi ploha mogla biti definirana i kao ploha koju opisuje kružnica kad rotira oko svog promjera. Poznate su i druge definicije kugline plohe, a mnoge druge su moguće.

Treba li da riješimo zadatak koji sadrži neki izveden pojam, npr. pojam kugline plohe, ili pojam parabole, a mi se želimo vratiti na definiciju tog pojma, možemo birati između različitih definicija. Da li će definicija biti prikladna, zavisit će u takvu slučaju mnogo od njenog izbora.

Naći površinu kugline plohe bijaše u doba kad je to Arhimed rješavao velik i težak zadatak. Arhimed je mogao birati između upravo spomenutih definicija kugline plohe. On je radije kuglinu plohu shvatio kao plohu koju proizvodi kružnica rotacijom oko čvrstog promjera. Upisao je u kružnicu pravilan mnogokut s parnim brojem stranica tako da je zadani čvrsti promjer spajao suprotne vrhove. Pravilan mnogokut aproksimira krug, a njegove stranice — rotirajući zajedno s krugom — proizvode konveksnu plohu, koja se sastoji od dva stoščeva plašta (s vrhovima u krajnjim tačkama čvrstog promjera) i od većeg broja plašteva krnjih stožaca između njih. Ta sastavljena ploha aproksimira kuglinu plohu. Arhimed ju je upotrijebio pri izračunavanju površine kugline plohe. Shvatimo li kuglinu plohu kao geometrijsko mjesto tačaka jednako udaljenih od središta, nećemo doći na pomisao o tako jednostavnoj aproksimaciji njene površine.

7. Vraćanje na definicije važno je u pronalaženju dokaza, ali je jednako važno i u njegovoj kontroli.

Netko tvrdi da može pokazati novo rješenje Arhimedova zadatka o određivanju površine kugline plohe. Ako dotični ima o kugli samo neodređen pojam, rješenje mu nikako neće valjati. On može imati i jasan pojam o kugli, ali ako mu ne uspije da taj pojam upotrijebi u svom dokazu, ja ne mogu znati da li je on uopće imao pojam o njoj, i dokaz mu ne valja. Stoga, slušajući dokaz, čekam moment kad će o kugli biti izrečeno nešto bitno, kad će se upotrijebiti njena definicija ili neki teorem o njoj. Ako takav moment uopće ne nastupi, rješenje ne valja.

Na takav način moramo, dakako, kontrolirati ne samo tuđe dokaze već i svoje vlastite. *Jesi li uzeo u obzir sve bitne pojmove koji se nalaze u zadatku?* Kako si iskoristio taj pojam? Jesi li upotrijebio njegovo značenje, njegovu definiciju? Jesi li iskoristio bitne činjenice, poznate teoreme o njemu?

Da je vraćanje na definicije važno za ispitivanje valjanosti nekog dokaza, isticao je Pascal postavljajući pravilo: »Substituer mentalement les définitions à la place des définis«, što znači: »Definirano zamijeniti u duhu definicijom«. Da je vraćanje na definicije važno i onda kad želimo smisliti neki dokaz, isticao je Hadamard.

8. Vraćanje na definicije važna je umna operacija. Želimo li shvatiti zašto su tako važne definicije riječi, moramo ponajprije biti svjesni da su važne riječi. Upotreba uma jedva je moguća bez upotrebe riječi, znakova ili nekakvih simbola. Riječi i znakovi imaju dakle moć. Primitivci vjeruju da riječi i simboli imaju čarobnu moć. Takvo mišljenje možemo shvatiti, ali se s njim ne možemo složiti. Moramo znati da snaga riječi nije u njenom zvuku, u onom što se zove »vocis flatus«, ni u »praznoj slami«, već u idejama što ih riječ izaziva u nama i, napokon, u činjenicama na kojima te ideje počivaju.

Prema tome zdrava je tendencija da se traže značenja riječi i činjenice koje iza njih stoje. Kad se matematičar vraća na definicije, on nastoji da iza tehničkih izraza zahvati stvarne odnose matematičkih objekata, kao što fizičar iza svojih tehničkih izraza traži određene eksperimente, a običan čovjek zdrava razuma hoće golu istinu, a ne varanje pustim riječima.

Descartes, René [Dekart R.] (1596—1650), veliki matematičar i filozof, namjeravao je da objavi univerzalnu metodu za rješavanje zadataka, ali je svoja *»Pravila za vođenje uma«* ostavio nedovršena. Fragmenti ovog djela, koji su nađeni među njegovim rukopisima i objavljeni poslije njegove smrti, sadrže brojniji i interesantniji materijal o rješavanju zadataka nego njegovo poznatije djelo *»Discours de la Méthode«*, iako je potonje djelo, vrlo vjerojatno, napisano kasnije. Ovi Descartesovi reci kao da opisuju postanak »Pravila«: »Kad sam kao mladić slušao o dosjetljivim pronalascima, pokušavao sam pronalaziti sam ne čitajući autora. Postupajući tako, malo-pomalo sam opažao da upotrebljavam izvjesna pravila.«

Dijagnoza je riječ koja se ovdje upotrebljava kao pedagoški termin. Značit će »pobliža karakteristika učenikova rada«. I ocjena karakterizira učenikov rad, samo donekle sirovo. Nastavniku koji želi poboljšati učenikov rad potrebna je pobliža karakteristika dobrih i loših mjesta, kao što je liječniku koji želi poboljšati pacijentovo zdravlje potrebna dijagnoza.

Mi se ovdje posebno bavimo sposobnošću učenika u rješavanju zadataka. Kako ćemo je karakterizirati? Tu se možemo okoristiti razlikovanjem četiriju faza pri rješavanju. Zaista, vladanje učenika u raznim fazama posve je karakteristično.

Nepotpuno *razumijevanje zadatka* zbog nedovoljne koncentracije možda je najčešći nedostatak pri rješavanju zadataka. S obzirom na *stvaranje plana* i postizavanje opće ideje rješenja česte su dvije greške, i to suprotne. Neki učenici navale bez ikakva plana i opće ideje na račune i konstrukcije. Drugi pak nespretno čekaju na pojavu neke ideje, a sami ništa ne pridonose pospješenju takve pojave. Pri *izvršavanju plana* najčešće su greške nemar i pomanjkanje strpljivosti u kontroliranju svakoga koraka. Vrlo se često uopće ne *kontrolira rezultat;* učenik je zadovoljan što ima neki odgovor, baca olovku, a najnevjerojatniji rezultat uopće ga ne uzbuđuje.

Ako je nastavnik postavio brižljivu dijagnozu takvih grešaka, uspjeh će ih možda izliječiti time da inzistira na izvjesnim pitanjima tabele.

Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! To je dobra vijest. Zadatak kome već znamo rješenje, a u vezi je s našim sadašnjim zadatkom, svakako je dobrodošao. Još je bolje došao ako je veza tijesna, a rješenje jednostavno. Tada je vjerojatno da će nam dotični zadatak pomoći u rješavanju našega sadašnjeg zadatka.

Situacija koju ovdje razmatramo tipična je i značajna. Da bismo to jasno spoznali, usporedit ćemo je sa situacijom u kojoj se nalazimo kad radimo s pomoćnim zadatkom. U oba slučaja cilj nam je riješiti izvjestan zadatak A, i mi uvodimo i razmatramo neki drugi zadatak B u nadi da ćemo iz razmatranja zadatka B izvući neke koristi za rješenje danoga zadatka A. Razlika je u našem odnosu prema B. Ovdje nam je uspjelo da se sjetimo na neki stari zadatak B, kome rješenje znamo, ali još ne znamo kako da to rješenje upotrijebimo. Tamo nam je pak uspjelo pronaći novi zadatak B; mi znamo (ili bar čvrsto naslućujemo) kako treba upotrijebiti B, ali još ne znamo kako da ga riješimo. Sva razlika između dviju situacija jest u našoj teškoći s obzirom na zadatak B. Kad je ta teškoća svladana, možemo u oba slučaja B upo-

trijebiti na isti način. Možemo primijeniti ili rezultat ili metodu (kako je to objašnjeno u članku POMOĆNI ZADATAK, 3), a u povoljnom slučaju možemo primijeniti i rezultat i metodu. U situaciji koju ovdje razmatramo znamo kako se rješava zadatak B, ali ne znamo još kako da to upotrijebimo. Zato pitamo: *Možeš li ga upotrijebiti? Možeš li primijeniti njegov rezultat? Možeš li primijeniti metodu kojom je taj zadatak riješen?*

Nastojanje da upotrijebimo neki stari, već riješeni zadatak, utječe na našu koncepciju novog zadatka. Pokušavamo li povezati oba zadatka, stari i novi, uvodimo u novi zadatak elemente koji odgovaraju izvjesnim važnim elementima starog zadatka. Uzmimo da je naš zadatak: odrediti kuglu koja je opisana zadanom tetraedru. To je stereometrijski zadatak. Sjetit ćemo se da smo u planimetriji već riješili analogni zadatak: konstruirati kružnicu koja je opisana zadanom trokutu. Zatim ćemo se sjetiti da smo u planimetrijskom zadatku upotrijebili simetrale stranica trokuta. Razborito je ako pokušamo nešto analogno uvesti u svoj sadašnji zadatak. Možemo dakle doći do toga da u svoj dani zadatak kao analogne pomoćne elemente uvedemo simetralne ravnine tetraedrovih bridova. Pomoću te ideje lako ćemo — analogno planimetrijskom — riješiti stereometrijski zadatak.

Prethodni je primjer tipičan. Razmatranje srodnog zadatka, koji je ranije riješen, vodi nas do toga da uvedemo neke pomoćne elemente, a uvođenje zgodnih pomoćnih elemenata omogućuje nam da u rješavanju danog zadatka potpuno iskoristimo srodan zadatak. Za takvim efektom težimo kad, razmišljajući o mogućnosti upotrebe srodnog, već riješenog zadatka, pitamo: *Ne bi li uveo neki pomoćni element, da uzmogneš upotrijebiti taj zadatak?*

Evo teorema koji je srodan tvom, a već je dokazan! Ovakva verzija naše napomene potkrijepljena je primjerom u § **19.**

Generalizacija je prijelaz od razmatranja jednog objekta k razmatranju skupa koji sadrži taj objekt; ili prijelaz od razmatranja nekog užeg skupa k razmatranju šireg skupa koji obuhvaća uži.

1. Naiđemo li kojim slučajem na sumu

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100,$$

možemo opaziti da se ona dade napisati u neobičnom obliku:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Sad je posve prirodno ako se pitamo: Događa li se često da je suma uzastopnih kubova

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

kvadrat cijelog broja? Pitajući to, mi generaliziramo. Ova je generalizacija sretna, ona vodi od jednog opažanja do značajnog općevaljanog zakona. Mnogi rezultati u matematici, fizici i u prirodnim naukama uopće nađeni su uspjelim generalizacijama. Vidi INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA.

2. Generalizacija može koristiti u rješavanju zadataka. Razmatraj ovaj stereometrijski zadatak: »Zadani su pravac i pravilan oktaedar svojim položajima. Odredi ravninu koja prolazi zadanim pravcem, a raspolavlja zadani oktaedar!« Zadatak se možda čini težak, ali je dovoljno samo malo poznavati oblik pravilnog oktaedra, pa će nam se nametnuti ovaj općenitiji zadatak: »Zadani su svojim položajima jedan pravac i jedno *centralnosimetrično tijelo*. Odredi ravninu koja prolazi zadanim pravcem, a raspolavlja zadano tijelo!« Dakako da će tražena ravnina prolaziti centrom simetrije toga tijela, ona će biti određena tom tačkom i zadanim pravcem. Budući da pravilan oktaedar ima centar simetrije, riješen je i naš prvobitni zadatak.

Čitalac će zacijelo zapaziti da je drugi zadatak općenitiji od prvog, a ipak je mnogo lakši. Glavni je naš posao pri rješavanju prvog zadatka bio: *pronaći drugi zadatak*. Pronašavši drugi zadatak, spoznali smo ulogu centra simetrije; *izvukli* smo ono svojstvo pravilnog oktaedra koje je bitno za naš zadatak, naime svojstvo da on ima takav centar.

Općenitiji zadatak može se riješiti lakše. To zvuči u početku paradoksalno, ali nakon prethodnog primjera za nas neće više biti paradoksalno. Glavni posao pri rješavanju specijalnog zadatka sastojao se u tome da nađemo općeniti

zadatak. Nakon ovog glavnog dijela posla preostaje samo još manji dio. Tako je u našem slučaju rješenje općenitog zadatka samo manji dio rješenja specijalnog zadatka.

Vidi PARADOKS PRONALAZAČA.

3. »Odredi volumen kvadratne krnje piramide ako su joj zadani osnovni bridovi 10 cm, 5 cm i visina 6 cm!« Stavimo li umjesto numeričkih vrijednosti 10, 5, 6 slova, npr. a, b, v, tada generaliziramo. Dobivamo zadatak, općenitiji od prvobitnog, naime ovakav: »Odredi volumen kvadratne krnje piramide ako su joj zadani osnovni bridovi a, b i visina v!« Takva generalizacija može biti vrlo korisna. Prelazimo li od jednog zadatka »s brojevima« na zadatak »sa slovima«, osvajamo pristup k novim postupcima; možemo mijenjati zadane podatke i time na razne načine kontrolirati rezultat. Vidi članke: MOŽEŠ LI KONTROLIRATI REZULTAT?, 2, i VARIJACIJA ZADATKA, 4.

Heurističko mišljenje nije isto što i konačno, strogo zaključivanje. Ono je privremeno i plauzibilno, i svrha mu je da otkrije rješenje danog zadatka. Mi smo često prisiljeni da rasuđujemo heuristički. Potpunu sigurnost postizavamo tek onda kad dobijemo potpuno rješenje, ali prije no što smo sigurni, moramo se često zadovoljiti više ili manje plauzibilnim slutnjama. Prije nego postignemo definitivno, može nam zatrebati privremeno. Heurističko nam mišljenje treba kad izgrađujemo strog dokaz, kao što su nam potrebne skele kad podižemo zgradu.

Vidi ZNAKOVI NAPRETKA. Heurističko mišljenje temelji se često na indukciji ili na analogiji; vidi članak INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA, zatim ANALOGIJA, 8, 9, 10[3].

Heurističko rasuđivanje samo je po sebi dobro. Ono što je loše jest: brkati ga sa strogim dokazom. A još je gore ako heurističko rasuđivanje deklariramo kao strog dokaz.

Izvjesna nastava, specijalno nastava diferencijalnog i integralnog računa za inženjere i fizičare, mogla bi se bitno

[3] Vidi i autorovu radnju u »*American Mathematical Monthly*«, sv. 48, str. 450—465.

poboljšati kad bi se bolje shvatila narav heurističkog mišljenja, kad bi se i njegove prednosti, i njegove granice iskreno priznale, i kad bi udžbenici heurističke dokaze otvoreno iznosili kao takve. Heuristički izvod, iznijet, ukusno i iskreno, može koristiti. On može pripremiti egzáktan dokaz, kojega izvjesne klice on obično i sadrži. Međutim, heuristički izvod vjerojatno će samo škoditi ako se iznosi dvosmisleno, s očitim krzmanjem između stida i preuzetnosti. Vidi članak ČEMU DOKAZI?

Heuristika ili »ars inveniendi« bio je naziv za izvjesnu disciplinu koja nije bila najjasnije definirana, a pripadala je logici, ili filozofiji, ili psihologiji. Ona je bila često sumarno, a rijetko kada detaljno prikazivana, a danas je gotovo zaboravljena. Cilj je heuristike da studira metode i pravila otkrivanja i pronalaženja. Neke tragove takva studija nalazimo već kod Euklidovih komentara. U tom je pogledu osobito interesantno jedno mjesto kod PAPUSA. Najpoznatija nastojanja da se izgradi sistem heuristike valja pripisati DESCARTESU i LEIBNIZU [Lajbnic], koji su obojica bili i veliki matematičari i veliki filozofi. Bernard BOLZANO dao je o heuristici značajna detaljna obavještenja. Ova je knjižica pokušaj da se heuristika oživi u modernoj, skromnoj formi. Vidi članak SUVREMENA HEURISTIKA.

Pridjev »heuristički« znači: »koji služi otkrivanju«.

Indukcija i potpuna indukcija. Indukcija je metoda kojom otkrivamo opće zakone promatranjem pojedinačnih slučajeva i njihovim kombiniranjem. Upotrebljavamo je u svim naukama, pa i u matematici. Potpunu indukciju upotrebljavamo samo u matematici, i to da bismo dokazali teoreme izvjesne vrste. Prilično je nezgodno što su nazivi slični, jer između obaju postupaka (tj. između indukcije i potpune indukcije) postoji tek vrlo neznatna logička povezanost. No postoji ipak izvjesna praktična veza; često upotrebljavamo obje metode zajedno. Razjasnit ćemo ih obje na istom primjeru.

1. Slučajno možemo zapaziti da je

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

Prepoznavši ovdje kubove i kvadrat, možemo činjenici koju smo zapazili dati zanimljiviji oblik:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Odakle tako što? Dešava li se često da je takva suma uzastopnih kubova kvadrat?

Pitajući tako, postupamo kao prirodoslovac koji, impresioniran nekom neobičnom biljkom ili nekom neobičnom geološkom formacijom, postavlja općenito pitanje. Naše općenito pitanje bavi se sumom uzastopnih kubova

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

Do tog pitanja doveo nas je »specijalni slučaj« $n = 4$.

Što da učinimo u vezi s našim pitanjem? Ono što bi učinio prirodoslovac: možemo istraživati i druge specijalne slučajeve. Specijalni slučajevi $n = 2$, 3 još su jednostavniji. Naredni je slučaj $n = 5$. Radi jednolikosti i potpunosti dodat ćemo i slučaj $n = 1$. Poređamo li lijepo sve te slučajeve, kao što bi i geolog poređao svoje primjerke određene rude, dobit ćemo ovu tablicu:

$$\begin{array}{lrcl}
1 & = 1 & = & 1^2 \\
1 + 8 & = 9 & = & 3^2 \\
1 + 8 + 27 & = 36 & = & 6^2 \\
1 + 8 + 27 + 64 & = 100 & = & 10^2 \\
1 + 8 + 27 + 64 + 125 & = 225 & = & 15^2
\end{array}$$

Teško bi se dalo pomisliti da su sve te sume uzastopnih kubova samo pukim slučajem kvadrati. U sličnom bi slučaju prirodoslovac vrlo malo sumnjao u valjanost općeg zakona koji se nazreo specijalnim slučajevima promatranim ranije. Opći je zakon *indukcijom* gotovo dokazan. Matematičar se izražava nešto opreznije, iako u biti razmišlja jednako. On bi kazao da nam se indukcijom snažno nameće ovaj teorem:

Suma prvih n kubova je kvadrat.

2. Došli smo do toga da naslućujemo značajan, malko tajanstven zakon. Zašto da te sume uzastopnih kutova budu kvadrati? A očito jesu kvadrati.

Što bi radio prirodoslovac u takvoj situaciji? Nastavio bi da ispituje svoju slutnju. Pri tome može krenuti raznim putovima istraživanja. On može gomilati daljnju eksperimentalnu dokaznu građu. Želimo li činiti isto, moramo ispitati naredne slučajeve: $n = 6, 7, \ldots$ No prirodoslovac može i preispitati činjenice koje je promatrao dolazeći do svoje slutnje. On će ih brižno uspoređivati i nastojati da iz njih izvuče neku dublju pravilnost, neku daljnju analogiju. Pođimo i mi tim putem istraživanja.

Ispitat ćemo ponovo slučajeve $n = 1, 2, 3, 4, 5$, koje smo poređali u svojoj tablici. Zašto su sve te sume kvadrati? Što možemo kazati o tim kvadratima? Baze tih kvadrata jesu 1, 3, 6, 10, 15. Što možemo kazati o tim bazama? Postoji li neka dublja pravilnost, neka daljnja analogija? U svakom slučaju ne čini se da baze rastu baš nepravilno. Kako rastu? Diferencija između dva uzastopna člana u tom nizu raste i sama:

$$3 - 1 = 2, \quad 6 - 3 = 3, \quad 10 - 6 = 4, \quad 15 - 10 = 5$$

Ove su diferencije napadno pravilne. Mi ovdje možemo zapaziti iznenađujuću analogiju između baza tih kvadrata, značajnu pravilnost u brojevima 1, 3, 6, 10, 15:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

Vrijedi li ova pravilnost općenito (a u suprotno se jedva može povjerovati), onda teorem što ga naslućujemo poprima određeniji oblik:

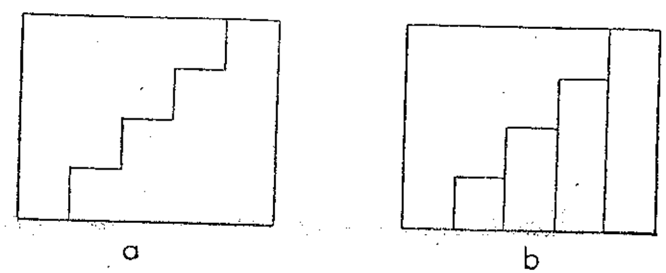
za $n = 1, 2, 3, \ldots$ *vrijedi* $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

3. Zakon koji smo upravo formulirali našli smo indukcijom, a način kako smo ga našli vodi nas do ideje indukcije, koja je nužno jednostrana i nesavršena, no nije izopačena. Indukcija pokušava da nađe pravilnost i povezanost iza promatranja. Njena su najistaknutija pomoćna sredstva: generalizacija, specijalizacija i analogija. Da bismo osmotrene činjenice razumjeli, nastojimo ih generalizirati. Generalizacija se osniva na analogiji, a ispituje se daljnjim specijalnim slučajevima.

Suzdržat ćemo se od daljnjih napomena na temu o indukciji, o kojoj među filozofima postoje velika neslaganja. Međutim, valja napomenuti da su mnoge matematičke rezultate najprije našli pomoću indukcije, a tek kasnije dokazali. Strogo prikazana matematika je sistematska deduktivna nauka, no matematika u nastajanju jest eksperimentalna induktivna nauka.

4. U matematici, kao i u fizici, možemo upotrijebiti promatranje i indukciju da bismo otkrili opće zakone. No ima jedna razlika. U fizici nema višeg autoriteta od promatranja i indukcije, a u matematici ga ima. To je: strog dokaz.

Pošto smo neko vrijeme radili eksperimentalno, bit će dobro da promijenimo stajalište. Budimo striktni. Otkrili smo zanimljiv rezultat, no rasuđivanje kojim smo do njega došli bilo je tek plauzibilno, eksperimentalno, privremeno, heurističko. Sad ćemo pokušati da taj rezultat definitivno uspostavimo strogim dokazom.



Sl. 11.

Tako smo došli do jednog »dokaznog zadatka«: rezultat koji smo malo prije (pod 2) postavili valja ili dokazati ili opovrgnuti.

Stvar možemo malo pojednostavniti. Znamo da je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ovo se svakako dade lako provjeriti. Uzmimo pravokutnik sa stranicama n i $n + 1$ pa ga razdijelimo (kao na slici 11. a, koja prikazuje slučaj $n = 4$) izlomljenom crtom na dvije polovine. Svaka je od tih polovina »stepenasta« i ima površinu $1 + 2 + \ldots + n$. Za $n = 4$ površina je $1 + 2 + 3 + 4$ (vidi sl. 11. b). Površina čitavog pravokutnika je $n(n+1)$. »Stepenasti« lik je polovina. Time je formula dokazana.

Rezultat koji smo dobili indukcijom možemo sad preinačiti u

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

5. Nemamo li nikakvih ideja o tome kako da dokažemo rezultat, možemo ga bar provjeriti. Uzet ćemo prvi slučaj, koji još nismo ispitali, $n = 6$. Za tu vrijednost formula prelazi u

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left[\frac{6 \cdot 7}{2}\right]^2$$

što nakon izračunavanja na objema stranama daje 441.

Formulu možemo još uspješnije ispitati. Formula je vrlo vjerojatno općevaljana, dakle valjana za sve vrijednosti od n. Ostaje li valjana ako prijeđemo od neke, bilo koje vrijednosti n na narednu vrijednost $n + 1$? Prema formuli, kako smo je malo prije napisali, moralo bi biti i

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Ovo ćemo jednostavno kontrolirati. Oduzmemo li od ove posljednje formule onu prijašnju, dobit ćemo

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Tu je kontrola laka. Desnu stranu možemo pisati kao

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [(n+2)^2 - n^2] = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [n^2 + 4n + 4 - n^2] =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}(4n + 4) = (n+1)^2 (n+1) = (n+1)^3$$

Naša formula, pronađena eksperimentalno, izdržala je životnu kušnju.

Razjasnimo potpuno što znači ta kušnja. Mi smo nesumnjivo dokazali da je

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Još ne znamo da li vrijedi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

No *ako* bismo znali da to *jest* ispravno, mogli bismo nakon zbrajanja s jednakošću, koju smo nesumnjivo dokazali, zaključiti da je

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

također ispravno, a to je upravo tvrdnja za naredni cio broj $n + 1$. Mi znamo, međutim, da naša slutnja zaista vrijedi za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Zbog ovoga što smo netom kazali mora slutnja koja vrijedi za $n = 6$ vrijediti i za $n = 7$; ako vrijedi za $n = 7$, mora vrijediti i za $n = 8$; vrijedi li za $n = 8$, tada vrijedi i za $n = 9$ itd. Ona vrijedi za sve n: opća valjanost je dokazana.

6. Prethodni dokaz može da posluži kao ogledni primjer, obrazac za mnoge slične slučajeve. Koje su bitne crte tog obrasca?

Tvrdnja koju valja dokazati treba da je unaprijed dana u preciznom obliku.

Tvrdnja treba da se odnosi na cio broj n.

Tvrdnja treba da je dovoljno »eksplicitna« kako bismo mogli ispitati ostaje li valjana pri prijelazu od n na naredni cio broj $n + 1$.

Uspije li nam to ispitivanje, moći ćemo na temelju iskustva, stečenog u toku ispitivanja, zaključiti da neka tvrdnja mora vrijediti za $n + 1$ ako vrijedi za n. A kad stignemo dotle, dovoljno nam je znati da tvrdnja vrijedi za $n = 1$; odavle izlazi ispravnost za $n = 2$; odavle za $n = 3$ itd. Prelazeći od nekog cijelog broja k narednom, dokazujemo tvrdnju općenito.

Ovaj postupak upotrebljava se tako često da zavređuje neki naziv. Mogli bismo ga nazvati »zaključivanje od n na $n + 1$« ili, još jednostavnije, »prijelaz na naredni cio broj«. Nesrećom se prihvatio termin »potpuna indukcija«. Taj naziv potječe od jedne slučajne okolnosti. Precizna tvrdnja koju valja dokazati potječe iz nekog izvora. S logičkog stanovišta nije važno što je izvor. No u mnogo slučajeva, kao npr. u ovom što smo ga detaljno prodiskutirali, izvor je indukcija, tvrdnja je nađena eksperimentalno, pa se tako dokaz pojavljuje kao matematičko upotpunjavanje indukcije. Time je objašnjen naziv.

7. Ima ovdje još jedan moment, koji je doduše ponešto suptilan, ali je važan za svakoga onog tko bi htio sam pronalaziti dokaze. U prethodnom razmatranju došli smo promatranjem i indukcijom do dvije različite tvrdnje, prve pod 1, druge pod 2. Druga je bila preciznija od prve. Kad smo obrađivali drugu tvrdnju, našli smo mogućnost da provjerimo prijelaz od n na $n + 1$, pa smo tako mogli pronaći dokaz »potpunom indukcijom«. Da smo obrađivali prvu tvrdnju ne obazirući se pri tom na preciznu određenost koju joj je pridala druga tvrdnja, jedva bismo mogli pronaći takav dokaz. I doista, prva je tvrdnja manje precizna od druge, manje »eksplicitna«, manje »opipljiva«, manje pristupačna ispitivanju i kontroli. Prijelaz od prve tvrdnje k drugoj, od manje precizne k preciznoj, bio je važna priprava za konačni dokaz.

Ova se okolnost čini paradoksalnom. Druga je tvrdnja jača, ona u sebi uključuje prvu, dok naprotiv prva, ponešto maglovita tvrdnja, teško može u sebi uključivati drugu, »oštro ocrtanu« tvrdnju. Prema tome, jači teorem možemo svladati lakše nego slabiji. To je PARADOKS PRONALAZAČA.

Inteligentan čitalac matematičke knjige želi dvoje:

prvo, uvidjeti ispravnost koraka koji je upravo poduzet u nekom dokazu;

drugo, vidjeti svrhu toga koraka.

Inteligentan slušač matematičkog predavanja želi isto. Ne može li uvidjeti da je sadašnji korak dokaza ispravan, ili ako čak nagađa da je možda pogrešan, protestirat će i pitati. Ne može li razabrati svrhu toga koraka, niti mu može naslutiti neki razlog, on obično ne može formulirati jasan prigovor, on neće protestirati, već će se smesti, postat će mu dosadno i izgubit će nit dokaza.

Inteligentan nastavnik i inteligentan pisac udžbenika treba da ovo imaju na umu. Ispravno pisati i ispravno govoriti svakako je nužno, ali nije dovoljno. Izvod, ispravno prikazan u knjizi ili na ploči, može biti nepristupačan i nepoučan ako nije razumljiva svrha uzastopnih koraka, ako čitalac (odnosno slušalac) ne može shvatiti kako je čovjeku bilo moguće naći takav dokaz, ako ga iz čitavog prikaza ništa ne može podsjetiti kako bi on sam mogao naći takav dokaz.

Pomoću pitanja i preporuka iz naše tabele mogu autori i nastavnici istaći svrhu i motive svojih dokaza. U tom je pogledu osobito korisno pitanje: DA LI SMO ISKORISTILI SVE ZADANO? Autor (odnosno nastavnik) može tim pitanjem upozoriti na valjan razlog za razmatranje nekog zadanog elementa koji dotad nije bio upotrijebljen. Čitalac (odnosno slušalac) može upotrijebiti isto pitanje kako bi shvatio zašto je autor odnosno nastavnik razmatrao upravo taj i taj element. I, postavljajući to pitanje, on će možda osjetiti da je dotični korak mogao otkriti i sam.

Inteligentan rješavač zadataka postavlja često sebi pitanja koja su slična pitanjima iz naše tabele. On otkriva pitanja ove vrste možda posve samostalno ili, ako je od nekoga čuo takvo pitanje, otkriva samostalno kako se ono zgodno upotrebljava. Pri tome on možda čak i nije svjestan da neprestano ponavlja isto stereotipno pitanje. Ili mu je pak pitanje osobito drago; on zna da je pitanje dio njegova stava svojstvenog nekoj određenoj fazi rada, i on dolazi do pravilnog stava postavljajući pravo pitanje.

Inteligentan rješavač zadataka može vidjeti da koriste pitanja i preporuke naše tabele. On će posve dobro shvatiti objašnjenja i primjere uz neko pitanje i naslutiti kako se ta pitanja na zgodan način upotrebljavaju. No, istinsko razumijevanje ne može postići ako u svom vlastitom radu ne naiđe na onaj postupak što ga pitanje nastoji izazvati i ako, doživjevši korist tog pitanja, sam ne otkrije kako se pitanje zgodno upotrebljava.

Inteligentan rješavač zadataka treba da je spreman da postavi svako pitanje iz tabele, no neka ne postavi ni jedno jedino ako na to ne bude potaknut pomnim razmatranjem dotičnog zadatka i svojim vlastitim nepristranim prosuđivanjem. On treba zapravo sam da spozna da li njegova sadašnja situacija dovoljno nalikuje ili ne nalikuje nekoj drugoj situaciji u kojoj je vidio da se pitanje uspješno primijenilo.

Inteligentan rješavač zadataka prije svega nastoji da zadatak shvati što potpunije i što jasnije. Međutim, samo razumijevanje nije dovoljno. On treba da se na zadatak koncentrira i da ozbiljno teži za rješenjem. Ako nije moguće da se u njemu pojavi istinska težnja za otkrićem rješenja, bit će bolje da se zadatka okani. Sva tajna stvarnog uspjeha jest: baciti svu svoju ličnost u zadatak.

Ispitaj svoju slutnju! Tvoja slutnja može biti tačna, ali je ipak nerazborito slutnju uzimati za dokazanu istinu — kao što često čine primitivni ljudi. Tvoja slutnja može biti i pogrešna. No jednako je nerazborito ne obazirati se uopće na slutnju — kao što katkad čine pedantni ljudi. Izvjesne slutnje zavređuju da ih ispitamo i uzmemo ozbiljno. To su one koje nam padaju na um pošto smo pažljivo razmotrili i stvarno razumjeli neki zadatak za koji smo se iskreno zainteresirali. Takve slutnje sadrže obično bar dijelak istine, iako — dakako — rijetko kad pokazuju čitavu istinu. Međutim, ako na zgodan način provjerimo takvu slutnju, ima izgleda da izvučemo čitavu istinu.

Mnoge slutnje pokazale su se doduše kao pogrešne, ali su usprkos tome bile korisne jer su dovele do neke bolje slutnje.

Nijedna ideja nije stvarno loša ako nismo nekritični. Stvarno je loše: ne imati uopće ideje.

1. *Nemoj tako!* Evo tipične priče o Petru Pavloviću. Pavlović radi u uredu. Nadao se skromnoj povišici plaće, ali

se u toj nadi, kako često s nadama biva, razočarao. Plaće nekih njegovih kolega bile su povišene, no njegova ne. Pavlović to nije mogao mirno primiti. Izjedao se sve više i više i najzad je posumnjao da je direktor Horvat kriv što nije dobio povišicu.

Mi ne možemo Pavlovića prekoravati zato što ga je obuzela ta sumnja. Zaista su postojale neke indicije koje su ukazivale na direktora Horvata. Prava pogreška bila je u tome što je Pavlović, nakon što je posumnjao, postao slijep za sve znakove koji su pokazivali u nekom drugom smjeru. Zakopao se u čvrsto uvjerenje da mu je direktor Horvat lični neprijatelj i ponašao se tako glupo da mu je gotovo i uspjelo direktora učiniti svojim neprijateljem.

Nevolja je u Pavlovićevu slučaju to što se ponaša kao većina nas. On nikad ne mijenja svoje važnije nazore. Manje važna mišljenja mijenja nerijetko, i to sasvim iznenada. Međutim, nikad ne sumnja u svoje mišljenje, dok ga ima, bilo ono važnije ili manje važno. On nikad ne sumnja u svoja mišljenja, ne razmatra ih, niti ih kritički ispituje. Kad bi razumio što znači kritičko ispitivanje, on bi ga naročito mrzio.

Priznat ćemo da je Pavlović donekle u pravu. Vrlo je zaposlen, ima dužnosti i u uredu i kod kuće. On ima malo vremena za skepsu i ispitivanje. U najpovoljnijem slučaju mogao bi preispitati samo nekoliko svojih uvjerenja. Pa zašto da posumnja u jedno kad nema vremena da istraži tu sumnju?

Ipak, nemoj raditi kao Pavlović! Ne dopusti da tvoje sumnje, slutnje, nagađanja — bez ispitivanja — narastu toliko da postanu neiskorjenjive! U svakom slučaju, u teoretskim će stvarima nekritičko primanje štetiti i najboljoj ideji, dok će ona uz kritičko ispitivanje cvjetati.

2. *Matematički primjer.* Između svih četverokuta zadana opsega nađi onaj koji ima najveću površinu!

Što je nepoznato? Jedan četverokut.

Što je zadano? Zadan je opseg četverokuta.

Kako glasi uvjet? Površina traženog četverokuta treba da je veća od površine bilo kojeg drugog četverokuta jednakog opsega.

Ovaj se zadatak znatno razlikuje od uobičajenih zadataka u elementarnoj geometriji, pa je stoga posve prirodno, da se započne naslućivanjem.

Koji će četverokut vjerojatno imati najveću površinu? Što bi bila najjednostavnija slutnja? Možda već znamo, da od svih likova jednakog opsega krug ima najveću površinu. Možda ćemo čak i naslutiti neko obrazloženje za plauzibilnost ove posljednje tvrdnje. No — a koji je četverokut najbliži krugu? Koji mu je najbliži s obzirom na simetriju?

Prilično jasno naslućujemo, da je rješenje kvadrat. Uzmemo li ovu slutnju kao ozbiljnu, moramo biti svjesni, što ona znači. Moramo imati smjelosti da formuliramo: »Između svih četverokuta zadana opsega kvadrat ima najveću površinu.« Ako se odlučimo, da tu tvrdnju ispitamo, situacija se mijenja. Na početku smo imali »odredbeni zadatak«. Pošto smo formulirali svoju slutnju, imamo »dokazni zadatak«. Formulirani teorem valja ili dokazati, ili opovrgnuti.

Ako ne znamo nikakav sličan zadatak, koji je već prije bio riješen, bit će nam zadatak prilično tvrd orah. *Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak! Možeš li riješiti dio zadatka?* Može nam pasti na um ovo: ako je kvadrat povlašten među četverokutima nekim svojim svojstvom, bit će on istim svojstvom povlašten i među pravokutnicima. Dio našeg zadatka bio bi riješen, kad bi nam uspjelo dokazati tvrdnju: »Između svih pravokutnika zadana opsega kvadrat ima najveću površinu«.

Ovaj se teorem čini pristupačnijim od prijašnjeg; dakako da je slabiji. U svakom slučaju moramo biti svjesni, što on znači, moramo se odvažiti da ga detaljnije formuliramo. Korisno ćemo ga preformulirati algebarskim jezikom.

Površina pravokutnika, kome su susjedne stranice a i b, jest ab.

Stranica kvadrata, koji ima jednak opseg kao spomenuti pravokutnik, jest $\frac{a+b}{2}$. Dakle je površina kvadrata $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Ona treba da je veća od površine pravokutnika, pa imamo

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$$

Je li to ispravno? Ista tvrdnja može se pisati u ekvivalentnom obliku

$$a^2 + 2\,ab + b^2 > 4\,ab$$

A to je tačno jer je ekvivalentno sa

$$a^2 - 2\,ab + b^2 > 0$$

odnosno sa

$$(a - b)^2 > 0$$

a ova posljednja nejednakost vrijedi uvijek ako nije $a = b$, tj. ako razmatrani pravokutnik nije kvadrat.

Svoj zadatak nismo, doduše, time još riješili, ali smo ipak dosta napredovali, i to upravo zato što smo otvoreno, smjelo razmatrali svoje, prilično očite slutnje.

Kontradiktoran. Vidi: UVJET.

Korolar (posljedak) je teorem do kojeg lako dolazimo ako pažljivo razmotrimo teorem što smo ga upravo našli. Riječ je latinskog porijekla; doslovni prijevod bio bi otprilike »dar«, »dodatak«.

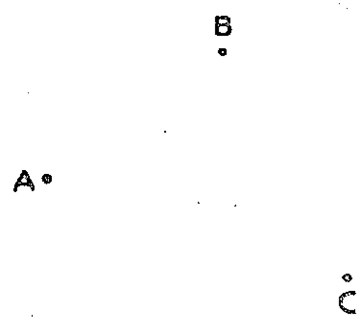
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716), veliki matematičar i filozof, namjeravao je napisati djelo o »umijeću pronalaženja«, ali nije nikad izvršio taj plan. Brojni fragmenti, razasuti po njegovim djelima, pokazuju ipak da je imao zanimljivih ideja o toj temi kojoj je značenje često naglašavao. Tako je, na primjer, pisao: »Ništa nije važnije nego vidjeti izvore pronalaženja koji su po mom mišljenju interesantniji od pronalazaka samih«.

Lema znači »pomoćni teorem«. Riječ je grčkog porijekla; doslovni prijevod bio bi »ono što se uzima, pretpostavlja«.

Mi želimo dokazati neki teorem A. Došli smo do toga da naslućujemo neki drugi teorem B. Kad bi teorem B bio istinit, možda bismo mogli pomoću njega dokazati A. Mi pretpostavljamo, uzimamo privremeno da vrijedi B (odgađajući pri tom dokaz tog teorema) i nastavljamo s dokazom teorema *A*. Takav teorem *B* smo pretpostavili, i on je pomoćni teorem za originalni teorem *A*. Ovaj mali primjer je prilično tipičan i objašnjava današnje značenje riječi »lema«.

Možeš li iz zadanih podataka izvesti što korisno? Pred nama je neriješen zadatak, otvoreno pitanje. Treba da *potražimo vezu između zadanog i nepoznatog*. Svoj neriješen zadatak možemo shvatiti kao otvoren prostor između zadanih podataka i nepoznanice, kao neki jaz što ga valja premostiti. Gradnju mosta možemo započeti i s jedne i s druge strane, i od nepoznanice i od zadanih podataka.

Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu! Tu nam se sugerira da započnemo od nepoznanice.



Sl. 12.

Promotri zadane podatke! *Možeš li iz zadanih podataka izvesti što korisno?* Tu nam se sugerira da započnemo od zadanih podataka.

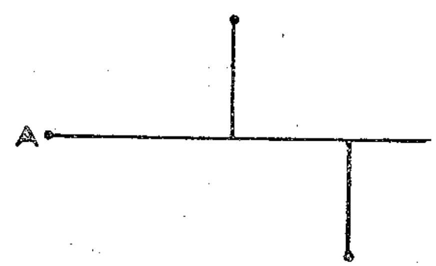
Čini se da je obično bolje započeti rasuđivanjem kod nepoznanice (vidi: PAPUS i RADITI NATRAŠKE). No i druga mogućnost, početak od zadanog, ima izgleda na uspjeh. Često valja pokušati tu mogućnost, pa ona zavređuje da je ilustriramo.

Primjer. Zadane su tri tačke: *A*, *B*, *C*. Tačkom *A* treba povući pravac koji je jednako udaljen od *B* i *C*.

Što je zadano? Tri tačke *A*, *B*, *C*, svojim položajem. Nacrtajmo sliku koja prikazuje zadane elemente! (Sl. 12.)

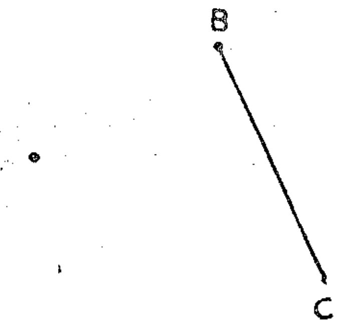
Što je nepoznato? Jedan pravac.

Kako glasi uvjet? Traženi pravac prolazi tačkom *A*, a između tačaka *B* i *C* prolazi tako da je jednako udaljen od tih tačaka. Mi ćemo spojiti nepoznanicu i zadane elemente na



Sl. 13.

slici koja prikazuje tražene odnose (sl. 13). Naša slika, izazvana *definicijom* udaljenosti tačke od pravca, pokazuje prave kutove, koji su sadržani u toj definiciji.



Sl. 14.

Slika je, kakva je nacrtana, još »previše prazna«. Nepoznat pravac još nije dovoljno povezan sa zadanim elementima *A*, *B*, *C*. Na slici je potrebna još neka pomoćna linija, neki dodatak. Koji? I dobar učenik možda će ovdje zapeti. Svakako postoje razne stvari koje možemo pokušati, no najbolje je pitanje kojim ćemo učenika ponovo pokrenuti: *Možeš li iz zadanih podataka izvesti što korisno?*

Što je, u stvari, zadano? Tri tačke, nacrtane na sl. 12, i ništa više. Tačke B i C nismo još dovoljno iskoristili; iz njih treba izvesti nešto korisno. A što možemo učiniti s dvije tačke? Spojiti ih dužinom. U redu — nacrtajmo sliku 14.

Stavimo li slike 13. i 14. jednu na drugu, rješenje će bljesnuti: pojavljuju se dva pravokutna sukladna trokuta i novo, veoma važno sjecište.

Možeš li kontrolirati rezultat? *Možeš li kontrolirati dokaz?* Povoljan odgovor na ova pitanja jača nam pouzdanje u rješenje i pridonosi temeljitosti našeg znanja.

1. Numeričke rezultate matematičkih zadataka možemo provjeriti tako da ih usporedimo s brojevima koje smo dobili promatranjem ili procjenjivanjem. Budući da su zadaci koji potječu iz praktičnih potreba ili iz prirodne radoznalosti gotovo uvijek usmjereni prema činjenicama, očekivali bismo da će rijetko kad izostati uspoređivanja s činjenicama. Međutim, svaki nastavnik ipak zna da u tom pogledu učenici izvode najnevjerojatnije stvari. Neke učenike uopće ne smeta ako dobiju rezultat da je brod dug 4916 m, a kapetan da ima 8 godina i 2 mjeseca (o kapetanu su uzgred još saznali da je djed). Takvo zapostavljanje očevidnog ne mora značiti da je učenik glup, već da je naprosto ravnodušan prema izvještačenim zadacima.

2. Zadatke »sa slovima« možemo provjeravati raznovrsnije i interesantnije od numeričkih zadataka. (Vidi § 14.) Kao daljnji primjer razmatrat ćemo kvadratnu krnju piramidu. Ako su joj a, b osnovni bridovi, a v visina, volumen joj je

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\, v.$$

Ovaj rezultat možemo provjeriti SPECIJALIZACIJOM. Ako je $b = a$, krnja piramida prelazi u prizmu, i formula daje

$a^2 v$. Ako je pak $b = 0$, krnja piramida prelazi u piramidu, i formula daje $\frac{a^2 v}{3}$. Možemo primijeniti i PROVJERAVANJE RAZMATRANJEM DIMENZIJA. Zaista, dimenzija izraza jest treća potencija duljine. Zatim možemo formulu ispitati *varirajući podatke*. I zaista, ako jedna od pozitivnih veličina a, b, v raste, raste vrijednost izraza.

Takva provjeravanja mogu se primijeniti ne samo na konačni rezultat već i na međurezultate. Ona su toliko korisna da se isplati pripremiti ih unaprijed; vidi VARIJACIJA ZADATKA, 4. Da bismo ih mogli upotrijebiti, bit će katkad korisno da neki numerički zadatak poopćimo i preinačimo u zadatak »sa slovima«; vidi GENERALIZACIJA, 3.

3. *Možeš li kontrolirati dokaz?* Kontroliramo li neki dokaz korak po korak, moramo izbjegavati puko ponavljanje. Puko ponavljanje lako postaje dosadno, nepoučno, teško se može pratiti pažljivo. Osim toga, gdje smo posrnuli jednom, vjerojatno ćemo posrnuti i drugi put ako su okolnosti iste kao i prije. Ako smatramo da je potrebno ponovo proći čitav dokaz korak po korak, onda moramo, da bismo dobili neku varijaciju, promijeniti bar redoslijed koraka ili njihovo grupiranje.

4. Manje je naporno, a zanimljivije je, ako izvučemo najslabiju tačku dokaza, pa nju ispitamo najprije. Pri iznalaženju onih mjesta u dokazu koja zavređuju provjeravanje vrlo je korisno pitanje: DA LI SI ISKORISTIO SVE ZADANO?

5. Jasno je da se naše nematematičko znanje ne može temeljiti isključivo na formalnim dokazima. Solidniji dio svog svakidašnjeg znanja neprestano provjeravamo i učvršćujemo svakidašnjim iskustvom. Provjeravanje promatranjem provodi se sistematski u prirodnim naukama. Takva provjeravanja poprimaju u fizici oblik pomnih eksperimenata i mjerenja, i kombiniraju se s matematičkim zaključcima. Može li se naše znanje u matematici temeljiti samo na formalnim dokazima?

To je filozofsko pitanje, o kome ovdje ne možemo debatirati. Sigurno je da se nikakvo matematičko znanje, ni naše vlastito ni znanje naših učenika, ne može temeljiti samo na formalnim dokazima. Ako se tu uopće radi o solidnom znanju, ono ima široku eksperimentalnu bazu, a ta se baza proširuje svakim zadatkom kojemu je rezultat uspješno provjeren.

Možeš li rezultat izvesti drugačije? Ako je dobiveno rješenje dugo i zamršeno, bit će posve prirodno naše naslućivanje da postoji neko jasnije rješenje koje nije toliko zaobilazno: *Možeš li rezultat izvesti drugačije? Možeš li ga uočiti na prvi pogled?* No ako nam je i uspjelo naći zadovoljavajuće rješenje, ipak nas može zanimati i drugo rješenje. Kao što neki materijalni predmet nastojimo zamijetiti s dva razna osjetila, tako se želimo o valjanosti nekog teoretskog rezultata uvjeriti pomoću dva razna izvoda. Pošto smo pronašli jedan dokaz, tražimo još jedan, kao što bismo htjeli dotaći neki predmet pošto smo ga vidjeli.

Dva dokaza bolja su od jednog. »Bolje vide dva oka nego jedno.«

1. *Primjer.* Treba odrediti površinu P plašta uspravnog krnjeg kružnog stošca kome su polumjeri baza R, r, a visina v.

Ovaj zadatak može se riješiti na različite načine. Na primjer, mi vjerojatno znamo formulu za plašt potpunog stošca. Budući da krnji stožac nastaje ako od nekog stošca odsiječemo manji stožac, njegov je plašt jednak diferenciji dvaju plašteva potpunih stožaca; preostaje samo da se oni izraze u veličinama R, r, v. Provedemo li što smo zamislili, dobivamo napokon formulu

$$P = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + v^2}$$

Došavši na ovaj ili onaj način poslije duljeg računanja do tog rezultata, poželjet ćemo jasniji izvod, koji nije toliko zaobilazan. *Možeš li rezultat izvesti drugačije? Možeš li ga uočiti na prvi pogled?*

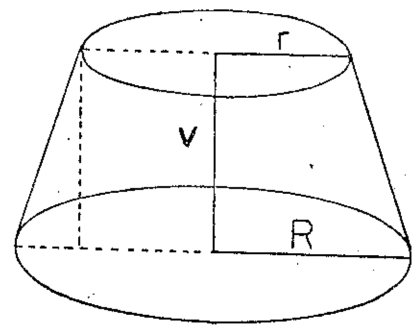
Želimo li čitav ovaj rezultat sagledati intuitivno, počet ćemo s nastojanjem da zahvatimo geometrijsko značenje pojedinih njegovih dijelova. Tada ćemo ustanoviti da je

$$\sqrt{(R - r)^2 + v^2}$$

duljina *izvodnice.* (Izvodnica je krak jednokokračnog trapeza koji rotacijom oko svoje simetrale daje krnji stožac; vidi sl. 15.) Zatim ćemo otkriti da je

$$\pi (R + r) = \frac{2 \pi R + 2 \pi r}{2}$$

aritmetička sredina opsega obiju baza toga krnjeg stošca. Razmatrajući ovaj dio formule, bit ćemo možda ponukani da ga napišemo u obliku



Sl. 15.

$$\pi (R + r) = 2 \pi \frac{R + r}{2}$$

a to je *opseg srednjeg presjeka* krnjeg stošca. (Srednjim presjekom zovemo ovdje presjek krnjeg stošca ravninom koja je paralelna s objema bazama, a raspolavlja visinu toga krnjeg stošca.)

Pošto smo našli nove interpretacije različitih dijelova formule, možemo sad čitavu formulu razmatrati u drugom svjetlu. Možemo je čitati ovako:

površina = opseg srednjeg presjeka × izvodnica.

Ovdje ćemo se podsjetiti pravila za trapez:

površina = srednjica × visina.

(Srednjica je paralelna s obje baze trapeza i raspolavlja visinu.) Zahvaćajući intuitivno analogiju između obiju formulacija, tj. one o krnjem stošcu i one o trapezu, čitav rezultat o krnjem stošcu vidimo »gotovo na prvi pogled«. To će reći: osjećamo da smo sad vrlo blizu kratkom i direktnom dokazu rezultata do kojeg smo došli dugim računanjem.

2. Prethodni je primjer tipičan. Nismo potpuno zadovoljni izvodom rezultata pa bismo rado taj izvod promijenili, poboljšali. Stoga studiramo svoj rezultat i nastojimo ga bolje shvatiti, razabrati neki njegov novi aspekt. Iz početka će nam možda uspjeti da nanovo interpretiramo izvjestan mali dio rezultata. Tada ćemo možda otkriti neki novi način na koji bismo shvatili neki drugi dio.

Ako postepeno ispitamo razne dijelove nastojeći ih razmotriti na razne načine, možemo najzad postići to da čitav rezultat vidimo u drugom svjetlu, a naša nova koncepcija rezultata može pobuditi novi dokaz.

Valja priznati da se sve ovo vjerojatno dešava prije iskusnom matematičaru koji se bavi nekim problemom više matematike nego početniku koji se bori s nekim elementarnim zadatkom. Matematičar s više znanja izloženiji je nego početnik opasnosti da mobilizira previše znanja pa da sastavi neki nepotrebno zamršen dokaz. No zauzvrat, iskusan će matematičar prije nego početnik moći da procjenjuje novu interpretaciju nekog djelića rezultata i da na temelju više takvih malih prednosti preobrazi napokon čitav rezultat.

Ipak se i u najnižim razredima dešava da učenici dođu do nepotrebno kompliciranog rješenja. Tada im nastavnik, bar jedan ili dva puta, treba da pokaže ne samo kako se zadatak može riješiti kraće već i kako se u samom rezultatu mogu naći upozorenja na mogućnost kraćeg rješavanja.

Vidi i članak REDUCTIO AD ABSURDUM I INDIREKTAN DOKAZ.

Možeš li rezultat upotrijebiti? Riješiti neki zadatak vlastitim snagama — predstavlja otkriće. Ako zadatak nije težak, otkriće nije toliko značajno, ali je ipak otkriće. Ako smo otkrili nešto, ma koliko to bilo skromno, valja istražiti ne

krije li se iza toga nešto više. Ne smijemo a da ne iskoristimo mogućnosti koje nam novi rezultat otvara, moramo nastojati da postupak što smo ga upotrijebili upotrijebimo ponovo. Iskoristi svoj uspjeh! *Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak?*

1. Smisliti nove zadatke možemo lako ako donekle poznamo glavna sredstva za variranje nekog zadatka, kao što su: GENERALIZACIJA, SPECIJALIZACIJA, ANALOGIJA, RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE. Polazimo od danog zadatka i izvodimo iz njega druge zadatke sredstvima što smo ih upravo spomenuli. Iz zadataka koje tako dobivamo izvodimo opet nove itd. Proces je teoretski beskonačan, ali ga u praksi rijetko kad vodimo veoma daleko jer dobiveni zadaci postaju dosta brzo nepristupačni.

Nove, lako rješive zadatke možemo sastavljati i tako da upotrijebimo rješenje zadatka koji je prethodno riješen. Međutim, takvi zadaci koje je lako sastavljati mogu lako postati nezanimljivi.

Nije tako lako naći nov zadatak koji je i zanimljiv i pristupačan. Za to treba iskustva, ukusa i sreće. No mi se ipak, ako nam uspije riješiti neki zadatak, moramo obazreti za daljnjim dobrim zadacima. Dobri zadaci i gljive imaju nešto zajedničko: nalazimo ih u hrpama. Nađemo li jednu gljivu (jedan zadatak), obazremo se; vjerojatno ćemo ih u blizini naći još.

2. Sad ćemo neke prethodne momente ilustrirati na istom primjeru što smo ga razmatrali u §§ **8**, **10**, **12**, **14**, **15**. Poći ćemo dakle od ovog zadatka:

Zadane su tri dimenzije (duljina, širina i visina) pravokutnog paralelepipeda. Kolika je dijagonala?

Znamo li rješenje ovog zadatka, možemo lako riješiti bilo koji od idućih zadataka (prva dva zapravo su formulirana već u § **14**):

Zadane su tri dimenzije kvadra. Koliki je polumjer upisane kugle?

Baza piramide je pravokutnik. Visina piramide ima svoje nožište u središtu toga pravokutnika. Zadana je visina piramide i njeni osnovni bridovi. Traže se pobočni bridovi.

Zadane su pravokutne koordinate (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) dviju tačaka u prostoru. Odredi udaljenost tih tačaka!

Ove zadatke rješavamo lako jer se oni jedva razlikuju od prvobitnog zadatka kome rješenje znamo. U svakom od tih slučajeva dodajemo tom prvobitnom zadatku neki novi pojam, kao: opisana kugla, piramida, pravokutne koordinate. Ovi se pojmovi lako dodaju i opet lako uklanjaju, pa ako ih se oslobodimo, nailazimo opet na svoj prvobitni zadatak i oslanjamo se na nj.

Zadaci koje smo upravo naveli interesantni su u izvjesnom smislu jer su interesantni oni pojmovi koje uvodimo u prvobitni zadatak. Posljednji zadatak o udaljenosti dviju tačaka, zadanih svojim koordinatama, dapače je osobito važan, jer su pravokutne koordinate osobito važne.

3. Evo još jednog zadatka koji možemo lako riješiti ako znamo rješenje svog prvobitnog zadatka: Zadane su duljina, širina i dijagonala kvadra; traži se visina.

Bit rješenja prvobitnog zadatka sastoji se u stvari u tome da se uspostavi veza između četiri veličine, tj. između tri dimenzije kvadra i njegove dijagonale. Ako su zadane ma koje tri veličine od te četiri, možemo iz te veze izračunati četvrtu. Tako možemo riješiti naš novi zadatak.

Na ovom primjeru vidimo kako ćemo iz jednog, već riješenog zadatka izvesti nove, lako rješive zadatke: prvobitnu nepoznanicu smatramo kao zadanu veličinu, a jednu od prvobitno zadanih veličina kao nepoznatu. Relacija koja povezuje nepoznanicu i zadane podatke ista je i u starom i u novom zadatku. Ako smo tu relaciju pronašli u starom zadatku, možemo je upotrijebiti i u novom.

Ovaj pustupak, gdje se novi zadaci izvode izmjenom uloga, posve je različit od postupka, opisanog pod 2.

4. Izvest ćemo sad neke nove zadatke drugim sredstvima.

Prirodna *generalizacija* našeg prvobitnog zadatka je ova: Nađi dijagonalu paralelepipeda ako su zadana tri brida koja izlaze iz iste krajnje tačke te dijagonale i tri kuta između ta tri brida!

Specijalizacija daje zadatak: Kolika je dijagonala kocke kojoj je zadan brid?

Analogija nas može dovesti do neiscrpne raznolikosti zadataka. Evo nekoliko zadataka koji su izvedeni iz onih što smo ih razmatrali pod 2: Nađi dijagonalu pravilnog oktaedra kome je zadan brid! Koliki je polumjer kugle opisane pravilnom tetraedru zadana brida? Zadane su geografske koordinate (duljina i širina) dviju tačaka na površini Zemlje (koju ćemo smatrati kuglom); odredi sfernu udaljenost tih tačaka!

Svi su ti zadaci interesantni, ali se samo zadatak dobiven specijalizacijom može riješiti neposredno na temelju rješenja prvobitnog zadatka.

5. Iz danog zadatka možemo izvoditi nove zadatke i tako da izvjesne elemente u danom zadatku smatramo promjenljivima.

Jedan specijalni slučaj zadatka, spomenutog pod 2, bio bi: odrediti polumjer kugle koja je opisana kocki zadana brida. Smatrat ćemo kocku i središte (zajedničko kocki i kugli) čvrstima, a polumjer kugle ćemo varirati. Ako je polumjer malen, kugla će biti sva u kocki. Raste li polumjer, kugla će se širiti (kao balon kad ga napuhavamo). U izvjesnom momentu kugla će dodirnuti kockine plohe, nešto kasnije njene bridove, a još kasnije kuglina ploha prolazit će vrhovima kocke. Koje vrijednosti poprima polumjer u ta tri kritična momenta?

6. Matematičko iskustvo učenika bit će nepotpuno ako mu se nikad ne pruži prilika da rješava *zadatke koje je sam pronašao*. Nastavnik može pokazati kako se iz upravo riješenog zadatka izvode novi zadaci i time pobuditi radoznalost svojih učenika. No, izvjestan dio otkrića može im prepustiti. Na primjer, govoreći o rastežljivoj kugli (koju smo razmatrali pod 5), nastavnik može pitati: »Što biste tu izračunali? Koja je vrijednost polumjera osobito interesantna?«

Možeš li zadatak drugačije izraziti? *Možeš li ga izraziti još nekako drugačije?* Cilj ovih pitanje jest prikladna VARIJACIJA ZADATKA.

Vrati se na definicije! Vidi: DEFINICIJA.

Mudrost u poslovicama. Rješavanje zadataka osnovna je ljudska aktivnost. Zaista, naše svjesno mišljenje pretežno se bavi zadacima. Ukoliko se ne predajemo pustim snovima ili maštanju, naše su misli usmjerene prema nekom cilju, tražimo sredstva, nastojimo riješiti neki zadatak.

Netko više, a netko manje uspijeva u postizavanju svojih ciljeva i u rješavanju svojih problema. Takve se razlike primjećuju, o njima se raspravlja, one se tumače. Čini se da se u nekim poslovicama sačuvala kvintesencija tih komentara. U svakom slučaju ima mnogo poslovica koje iznenađujući zgodno karakteriziraju tipične postupke pri rješavanju zadataka, svojstva zdrava razuma, uobičajene doskočice i najčešće pogreške. U poslovicama ima mnogo oštroumnih napomena, pa i nekih suptilnih, ali u njima očito nema nikakvog naučnog sistema bez nedosljednosti i tamnih mjesta. Naprotiv, naići ćemo na poslovice koje o istoj stvari daju upravo suprotne savjete, a osim toga postoji i velika sloboda u tumačenju. Smiješno bi bilo poslovice smatrati autoritativnim vrelom sveobuhvatne mudrosti, no bila bi šteta kad se uopće ne bismo obazirali na slikovite opise heurističkih postupaka što nam ih poslovice daju.

Bilo bi zanimljivo sakupiti i grupirati poslovice o planiranju, o traženju pomoćnih sredstava i o izboru između raznih mogućnosti u radu — ukratko: poslovice o rješavanju zadataka. Ovdje ne raspolažemo s dovoljno prostora koji bi bio potreban za takav posao. Mi možemo tek citirati nekoliko poslovica koje ilustriraju glavne faze rješavanja kako su one navedene u našoj tabeli. (O tim se fazama raspravlja u §§ **6—14**. i drugdje.) Citirane poslovice tiskane su kurzivom.

1. Prije svega ostalog moramo svoj zadatak razumjeti. Moramo jasno vidjeti cilj koji je pred nama: *Što god radiš, misli na posljedice! Prvo gledaj gdje ćeš isplivati, pa onda zaplivaj!* To je stari savjet. Latinski se kaže »respice finem«. Na žalost, svi ne mare za taj dobri savjet. Ima ih koji često počinju mudrovanjem, brbljanjem, pa čak i užurbanim radom, a da zapravo ne shvaćaju cilj kojem se teži. *Tko ne smišlja posljednje, prva ga bije po glavi. Dobar početak — pola posla.* Ako cilj nije jasan u našoj svijesti, lako ćemo skrenuti sa svog zadatka i *pasti s konja na magarca.*

No, nije dovoljno samo shvatiti zadatak. Treba i težiti k njegovu rješenju. Nema izgleda da ćemo moći riješiti neki

težak zadatak ako živo ne želimo da ga riješimo. Postoji li takva težnja, ima i izgleda za rješenje. *Sve se može što se hoće. Živ će čovjek sve učiniti.*

2. Glavni posao u rješavanju zadatka jest: stvoriti plan, doći do ideje o prikladnim postupcima.

Dobra ideja je nešto sretno, inspiracija, dar. No dar što ga valja zaslužiti. *Bez muke nema nauke. Iz trnja ruža se rađa. I tvrdo drvo crv istoči. Od jednog udarca dub ne pada.* Međutim, nije dovoljno samo pokušavati ponovo; treba da iskušamo razna sredstva, treba da variramo svoje pokušaje. *Zar je jedan put u Laze?* Svoje pokušaje moramo prilagoditi prilikama. *Nužda zakon mijenja. Bolje išta nego ništa. Ako ne možemo kako hoćemo, a mi ćemo kako možemo.* Ako nam nešto ne uspije, ne valja se držati toga *kao pijan plota*, već treba pokušati nešto drugo. Dapače, mi moramo od početka biti pripremni i na neuspjeh svog plana i imati drugi u rezervi. *Jadan ti je oni tko na jednoj grani sjedi.* Dakako da možemo i pretjerati u takvu prelaženju s jednog plana na drugi te gubiti vrijeme. Tada možemo čuti ironičnu primjedbu: *Ako ima posla, ima i dana.*

Dešava se dosta često da — kad nastojimo izvući što korisno iz svog pamćenja — ne cijenimo dovoljno neku ideju koja nam padne na um, i to zato što je ona nenapadna. Vještak možda i nema više ideja nego što ih ima neiskusan, ali ono što ima cijeni više i iskorišćuje bolje. *Gvožđe se kuje dok je vruće. Drži sreću objeručke dok je kod tebe!*

3. S provođenjem plana treba da započnemo u pravi čas, kad je on zreo, ne prije. Ne valja početi prenaglo. *Žuri se polako! Tko polako ide, dalje dođe. Preči put kola lomi.* Međutim — ne valja ni predugo oklijevati. *Izbirač dobije otirač Tko se boji vrabaca, nek ne sije proje! Gdje se lijeva, tu se i prolijeva.*

Određujući pravi čas moramo dobro razmisliti. Evo jedne opomene koja nas upozoruje na vrlo čestu pogrešku i slabost u našem rasuđivanju: *Što tko žudi, lasno vjeruje.*

Naš plan obično daje samo opće konture. Moramo se uvjeriti o tome pristaju li detalji u te konture, pa brižljivo ispitivati jedan detalj za drugim. *Zrno do zrna pogača. Kiša pada kapljicama, a napada lokvicama.*

Provodeći svoj plan, moramo paziti da svoje korake poređamo u pravilnom redoslijedu (koji je često upravo suprotan redoslijedu pronalaženja). *Poredom se i u vodenici melje. Ne hasni rad gdje nije red.*

4. Osvrt na gotovo rješenje važna je i poučna faza rada: *Misli su posljednje vazda bolje. Uveče se dan hvali.*

Provjeravamo li rješenje, možemo otkriti neku naknadnu potvrdu rezultata. Početnika valja upozoriti da je takva naknadna potvrda vrijedna, da su dva dokaza bolja od jednog. *Bolje vide dva oka nego jedno. Što je više jaja, to je gušća čorba. S jednim fišekom ne ide se u boj.*

5. Napomene poslovica o rješavanju zadataka nisu time nipošto iscrpene. Ipak, mnoge druge poslovice koje bismo mogli navesti jedva bi dale neke nove teme, već bi samo varirale netom spomenute teme. Izvjesne sistematičnije i suptilnije aspekte rješavačkog procesa »mudrost u poslovicama« neće obuhvatiti.

Opisujući sistematičnije aspekte rješavanja, autor je katkad nastojao da se povodi za jednim naročitim stilom poslovica, što nije lako. Evo nekih »sintetičkih« poslovica koje opisuju ponešto suptilnije stavove:

Svrha inspirira sredstva.

Pet tvojih najboljih prijatelja jesu: Što, Zašto, Gdje, Kada i Kako. Ti pitaš: Što?, pitaš: Zašto?, pitaš: Gdje?, Kada?, Kako? Ne pitaj nikog drugog ako ti je potreban savjet!

Ne vjeruj ničemu, ali sumnjaj samo u ono što je vrijedno sumnje!

Pogledaj oko sebe kad si našao svoju prvu gljivu, kad si učinio svoje prvo otkriće! Rastu u hrpama.

Nacrtaj sliku! Vidi: SLIKE. *Uvedi zgodne oznake!* Vidi: OZNAKE.

Napredak i dostignuće. Jesi li što napredovao? Što si bitno već postigao? Takva pitanja postavljat ćemo sami sebi kad rješavamo zadatak, ili ih pak možemo postavljati učeniku čiji rad nadziremo. Mi smo navikli da na taj način u konkretnim slučajevima — manje ili više sigurno — prosuđujemo

napredak i dostignuće. Korak od takvih konkretnih slučajeva do općenitog opisa nipošto nije lak. No moramo ga ipak poduzeti ako želimo da nam studij heuristike bude donekle potpun. Potrebno je razjasniti u čemu se općenito sastoji napredak i dostignuće u rješavanju zadataka.

1. Da bismo riješili neki zadatak, moramo nešto znati o dotičnom predmetu, moramo izabrati potrebne detalje iz svog znanja koje postoji, ali na početku miruje, pa te detalje sakupiti. Naše shvaćanje zadatka mnogo je bolje na kraju nego na početku. Čime se ono povećalo? Onim što smo uspjeli izvući iz svog pamćenja. Da bismo došli do rješenja, moramo se sjetiti raznih bitnih činjenica. Radi li se o matematičkom zadatku, treba da se sjetimo riješenih zadataka, poznatih teorema i definicija. Za ovo izvlačenje potrebnih elemenata iz naše memorije mogli bismo uzeti naziv *mobilizacija.*

2. Međutim, da bismo riješili zadatak, nije dovoljno, da se samo sjetimo izoliranih činjenica, da ih samo sakupimo. Mi moramo te činjenice i spajati, kombinirati, a to kombiniranje mora biti dobro prilagođeno danom zadatku. Rješavajući matematički zadatak, moramo dakle smisliti takav dokaz, takav izvod, koji će sakupljeni materijal povezivati u dobro uređenu cjelinu. Ovo prilagođivanje i kombiniranje mogli bismo nazvati riječju *organizacija.*

3. Mi zapravo nikad ne možemo stvarno odvojiti mobilizaciju od organizacije. Ako na zadatku radimo sabrano, podsjećamo se samo onih činjenica koje su manje-više povezane s našim ciljem, i ne treba ništa drugo nego da povežemo i organiziramo materijal što smo ga sakupili i mobilizirali.

Mobilizacija i organizacija samo su dva *aspekta* istog složenog procesa. Taj proces ima još i mnoge druge aspekte.

4. Jedan od tih drugih aspekata napretka u našem radu je taj da se *mijenja naša koncepcija.* Obogaćena svim onim materijalom što smo ga sakupili, zadatku prilagodili i u zadatak uklopili, naša je koncepcija zadatka na kraju mnogo potpunija nego na početku. U želji da od svoje početne koncepcije zadatka dođemo do primjerenije i uređenije, pokušavamo razna stajališta i razmatramo zadatak sa svih strana. Bez VARIJACIJE ZADATKA jedva ćemo moći napredovati.

5. Napredujući prema svom konačnom cilju, vidimo ga sve više. Kad ga bolje vidimo, prosuđujemo da smo mu bliže. Napredujući u istraživanju svog zadatka, *predviđamo* sve jasnije što treba učiniti da bismo zadatak riješili, i kako to treba učiniti. Rješavajući matematički zadatak, možemo predvidjeti da se može upotrijebiti izvjestan poznat teorem, da će nam možda pomoći razmatranje nekog riješenog zadatka, ili da se moramo vratiti na značenje izvjesnog tehničkog izraza. To predviđanje neće biti potpuno sigrno, već samo donekle plauzibilno. Potpuno sigurni bit ćemo tek onda kad zadatak potpuno riješimo. Međutim, i prije nego postanemo potpuno sigurni, trebat ćemo se često zadovoljiti više-manje plauzibilnim slutnjama. Bez plauzibilnih, privremenih razmatranja nikad ne bismo mogli naći konačno, sigurno rješenje. HEURISTIČKO MIŠLJENJE je potrebno.

6. Što je napredovanje prema rješenju? Sve veća mobilizacija i organizacija našeg znanja, postepen razvoj naše koncepcije zadatka, sve bolje predviđanje onih koraka koji će sačinjavati definitivan dokaz. Možemo napredovati jednoliko, sitnim koracima, no katkad ćemo napredovati naglo, u skokovima. Nenadan prodor prema rješenju naziva se SJAJNA IDEJA, dobra ideja, sretna misao. Kažemo: »Sinulo mu je«. (Nijemci imaju izraz »*Einfall*«.) Što je zapravo sjajna ideja? Nenadana i znatna promjena naših vidika, nagla reorganizacija načina na koji zadatak shvaćamo, gotovo sigurno predviđanje onih koraka koji su nam potrebni da dobijemo rješenje.

7. Prethodna razmatranja daju pitanjima i preporukama naše tabele pravu pozadinu.

Mnoga od tih pitanja i preporuka direktno smjeraju na *mobilizaciju* ranije stečenog znanja: *Jesi li zadatak već prije vidio? Ili si isti zadatak vidio u nešto drugačijem obliku? Znaš li neki srodni zadatak? Znaš li koji teorem koji bi ti mogao pomoći? Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!*

Ima tipičnih situacija kada smatramo da smo sakupili pravi materijal, pa prelazimo na bolju *organizaciju* mobiliziranog: *Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti? Možeš li primijeniti njegov rezultat?*

Možeš li primijeniti metodu kojom je taj zadatak riješen? Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj zadatak?

Ima pak drugih tipičnih situacija kada smatramo da još nismo sakupili dovoljno materijala. Rado bismo znali što nam još nedostaje: *Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet? Jesi li uzeo u obzir sve bitne pojmove koji se nalaze u zadatku?*

Neka pitanja smjeraju direktno na varijaciju zadatka: *Možeš li zadatak drugačije izraziti? Možeš li ga izraziti još nekako drugačije?* Mnoga pitanja smjeraju na varijaciju zadatka specijalnim sredstvima, gdje se iskorišćuje vraćanje na DEFINICIJU, ANALOGIJA, GENERALIZACIJA, SPECIJALIZACIJA, RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE.

Neka nas daljnja pitanja potiču na to da pokušamo *predvidjeti* bit rješenja za kojim težimo: *Je li moguće zadovoljiti uvjet? Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice? Ili nije dovoljan? Možda je preodređen? Ili kontradiktoran?*

Pitanja i preporuke naše tabele izrijekom ne spominju *sjajnu ideju*, ali se de facto sva njome bave. U fazi razumijevanja zadatka tu ideju pripremamo. Stvarajući plan, nastojimo je izazvati. Kad smo je izazvali, provodimo je. Osvrćući se na tok rješavanja i na rezultat, nastojimo je još bolje iskoristiti.[4]

Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, nemoj da te taj neuspjeh previše ražalosti! Nastoj se utješiti nekim lakšim uspjehom, *pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak!* Zatim ćeš možda smoći odvažnost da ponovo napadneš svoj prvobitni zadatak. Ne zaboravi da se čovjekova superiornost sastoji u tome da zaobilazi prepreku koju ne može svladati direktno, da se domišlja nekom prikladnom pomoćnom zadatku ako prvobitan zadatak izgleda nerješiv!

Možeš li smisliti pristupačniji srodni zadatak? Ti sada moraš *pronaći* neki srodni zadatak, a ne samo *sjetiti se* takva

[4] Razne momente iz ovog članka autor razmatra potpunije u svom djelu objavljenom u časopisu »*Acta Psychologica*«, 4. svezak (1938), str. 113—170.

zadatka. Ovo potonje već si bio pokušao pitanjem: *Znaš li neki srodni zadatak?*

Preostala pitanja u onoj alineji naše tabele koja počinje s naslovom ovog članka imaju zajednički cilj, a taj je VARIJACIJA ZADATKA. Ima raznih načina da se to postigne: GENERALIZACIJA, SPECIJALIZACIJA, ANALOGIJA i drugih, koje nam daje raznoliko RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE.

Odlučnost, nada, uspjeh. Pogrešno bi bilo misliti da je rješavanje zadataka čista »stvar intelekta«. Važna je odlučnost i osjećajni momenti. Mlitava volja i trom pristanak da se nešto malo uradi mogu biti dovoljni za neki šablonski zadatak u razredu. No, za rješavanje ozbiljnog naučnog problema potrebna je snaga volje koja je sposobna izdržati godine naporna rada i gorkih razočaranja.

1. Volja koleba između nade i očajanja, između zadovoljstva i razočaranja. Lako je ići dalje kad se nadamo da ćemo ubrzo naići na rješenje, ali je teško istrajati ako ne vidimo nikakav izlaz iz teškoća. Oduševljeni smo ako se naše predviđanje obistini. Utučeni smo kad vidimo da je odjednom blokiran put kojim smo išli dosta pouzdano. Naša se volja taka uskoleba.

»Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer.« »I bez nade možeš poduzimati i bez uspjeha ustrajati.« Tako govori čvrsta volja, čast i dužnost, plemenit čovjek u plemenitoj stvari. Ipak, odlučnost te vrste ne bi bila dovoljna za naučnog radnika kome treba nešto nade pa da započne rad i nešto uspjeha da ga nastavi. U naučnom je radu potrebno da se odlučnost mudro raspodijeli prema izgledu na uspjeh. Ne primaj se zadatka ako nije na neki način interesantan; lati se posla ozbiljno ako ti zadatak izgleda instruktivan; a baci se na posao svim žarom ako zadatak mnogo obećava! Ako si sebi postavio cilj, ustraj pri njemu, ali ga nepotrebno ne otežavaj! Ne preziri sitne uspjehe, već ih, naprotiv, traži: *Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak!*

2. Ako učenik čini zaista besmislene grube pogreške ili je očajno spor, nevolja je gotovo uvijek u istom: učenik uopće

nema volje da riješi zadatak, ne nastoji čak ni da ga pravo shvati, pa ga i ne shvati. Stoga nastavnik koji ozbiljno hoće da pomogne svom učeniku treba prije svega potaknuti njegovu radoznalost i pobuditi u njemu neku želju za rješavanjem zadatka. Učeniku treba dati i nešto vremena da se sabere i odluči za početak rada.

Učiti nekog kako se rješavaju zadaci znači i odgajati mu volju. Rješavajući zadatke (koji ne smiju biti prelagani), učenik uči da ustraje i usprkos neuspjehu uči cijeniti i sitna napredovanja, uči čekati bitnu ideju i koncentrirati se na nju svim svojim snagama kad se ona pojavi. Ako učenik u školi nije imao prilike da iskusi razne osjećaje u borbi za rješenje, tada je njegov matematički odgoj promašio u onom pogledu koji je za život najvažniji.

Odredbeni zadaci i dokazni zadaci. Povući ćemo paralelu između ove dvije vrste zadataka.

1. Cilj je »odredbenog zadatka«: odrediti izvjestan objekt, nepoznanicu zadatka.

Nepoznanicu nazivamo još i nepoznatom veličinom, traženim objektom. »Odredbeni zadaci« mogu biti teorijski i praktični, apstraktni i konkretni, ozbiljni zadaci ili tek zagonetke. Mi možemo tražiti svakakve nepoznanice; možemo nastojati da pronalazimo, dobivamo, stječemo, proizvodimo, konstruiramo sve vrste objekata koje se dadu zamisliti. U detektivskom romanu nepoznanica jest: ubojica. U šahovskom problemu nepoznanica jest: izvjestan potez šahovskom figurom. U nekim zagonetkama nepoznanica jest: jedna riječ. U izvjesnim elementarnim zadacima iz algebre nepoznanica jest: jedan broj. U geometrijskom konstruktivnom zadatku nepoznanica jest: geometrijska figura.

2. Cilj je »dokaznog zadatka«: uvjerljivo pokazati da je izvjesna, jasno formulirana tvrdnja istinita, ili pak pokazati da je pogrešna. Moramo odgovoriti na pitanje: »Je li ova tvrdnja istinita ili nije?« Treba da odgovorimo uvjerljivo, moramo zaključivanjem dokazati ili da je tvrdnja istinita ili da nije.

Jedan svjedok tvrdi da je optuženi dotične noći bio kod kuće. Sudac treba da pronađe da li je tvrdnja istinita ili nije, a osim toga mora što bolje obrazložiti rezultat svoje istrage. Prema tome, sudac rješava jedan »dokazni zadatak«. Drugi bi »dokazni zadatak« bio: »Dokaži Pitagorin poučak!« Ne kažemo: »Dokaži ili opovrgni Pitagorin poučak!« U nekom bi pogledu bilo bolje kad bismo u formulaciju zadatka uključili i mogućnost opovrgavanja, no ovdje možemo tu mogućnost mimoići jer znamo da je vjerojatnost za opovrgavanje Pitagorina poučka prilično malena.

3. Glavni dijelovi »odredbenog zadatka« jesu: *nepoznanica, zadani podaci i uvjet.*

Treba li da konstruiramo trokut sa stranicama a, b, c, nepoznanica je trokut, zadani podaci su tri dužine a, b, c, a uvjet kome treba da udovoljava trokut jest taj da su njegove tri stranice jednake zadanim dužinama a, b, c. Ako bi bilo potrebno da konstruiramo trokut s visinama a, b, c, nepoznanica je objekt iste kategorije kao prije, zadani podaci su isti, ali je različit uvjet koji veže nepoznanicu sa zadanim podacima.

4. Ako je »dokazni zadatak« matematički zadatak uobičajene vrste, glavni su mu dijelovi: *pretpostavka i tvrdnja* teorema koji valja ili dokazati ili opovrgnuti.

»Ako su četiri stranice četverokuta međusobno jednake, dijagonale su mu međusobno okomite.« Drugi dio je tvrdnja, a prvi dio, koji počinje s »ako«, jest pretpostavka.

[Sve matematičke teoreme nije moguće na prirodan način razdvojiti na pretpostavku i tvrdnju. Tako bi jedva bilo moguće razdvojiti teorem: »Ima bezbroj prim brojeva.«].

5. Želimo li riješiti »odredbeni zadatak«, moramo poznavati, i to dobro poznavati, njegove glavne dijelove: nepoznanicu, zadane podatke i uvjet. Naša tabela sadrži mnoga pitanja i preporuke o tim dijelovima:

Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet?

Rastavi razne dijelove uvjeta!

Potraži vezu između zadanog i nepoznatog!

Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!

Zadrži samo jedan dio uvjeta, a odbaci drugi dio; dokle je tada nepoznanica određena, kako se ona može mijenjati? Možeš li iz zadanih podataka izvesti što korisno? Možeš li

zamisliti druge neke zadane podatke koji bi bili pogodni za određivanje nepoznanice? Možeš li promijeniti nepoznanicu, ili zadane podatke, ili — ako treba — oboje tako da nova nepoznanica i novi zadani podaci budu međusobno bliži?

Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet?

6. Želimo li riješiti »dokazni zadatak«, moramo poznavati, i to dobro poznavati, njegove glavne dijelove: pretpostavku i tvrdnju. Ima korisnih pitanja i preporuka o ovim dijelovima. Pitanjima i preporukama naše tabele, prilagođenim specijalno za »odredbene zadatke«, pripadaju odgovarajuća pitanja i preporuke za dokazne zadatke:

Što je pretpostavka? Što je tvrdnja?

Rastavi razne dijelove pretpostavke!

Potraži vezu između pretpostavke i tvrdnje!

Promotri tvrdnju! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog teorema koji sadrži istu ili sličnu tvrdnju!

Zadrži samo jedan dio pretpostavke, a odbaci drugi dio; je li tvrdnja tada još valjana? Možeš li iz pretpostavke izvesti što korisno? Možeš li zamisliti drugu neku pretpostavku, iz koje bi lako mogao izvesti tvrdnju? Možeš li promijeniti pretpostavku, ili tvrdnju, ili — ako treba — oboje tako da nova pretpostavka i nova tvrdnja budu međusobno bliže?

Jesi li iskoristio čitavu pretpostavku?

7. »Odredbeni zadaci« važniji su u elementarnoj, a »dokazni zadaci« u višoj matematici. U ovoj se knjizi jače ističu »odredbeni zadaci«, no autor se nada da će uspostaviti ravnotežu u jednoj opširnoj obradi teme.

Oznake. Ako želimo sebi predočiti prednosti zgodno odabrane i dobro poznate simbolike, pokušajmo zbrojiti nekoliko ne premalenih brojeva, uz uvjet da ne smijemo upotrijebiti arapske cifre, već rimske. Treba, na primjer, zbrojiti brojeve MMMXC, MDXCVI, MDXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

Važnost matematičkih oznaka jedva ćemo moći precijeniti. Suvremene račundžije, koji upotrebljavaju decimalni sistem, u velikoj su prednosti prema negdašnjima, koji nisu raspolagali tako zgodnim načinom pisanja brojeva. Današnji prosječan učenik, koji zna uobičajene oznake u algebri, u analitičkoj geometriji, u diferencijalnom i integralnom računu, u golemoj je prednosti prema grčkom matematičaru kad treba da rješava zadatke o površinama i volumenima, zadatke kojima se tada bavio genij jednog Arhimeda.

1. Govor i mišljenje usko su povezani; upotreba riječi pomaže razumu. Neki su filozofi i filolozi otišli nešto dalje tvrdeći da je upotreba riječi neophodno nužna za upotrebu razuma.

Čini se da je posljednja tvrdnja ipak ponešto pretjerana. Imamo li nešto iskustva u ozbiljnom matematičkom radu, znamo da možemo prilično naporno razmišljati ne upotrebljavajući nijednu riječ, razmatrajući samo geometrijske figure ili operirajući algebarskim simbolima. Figure i simboli usko su povezani s matematičkim mišljenjem; njihova upotreba pomaže razumu. Onu ponešto usku tvrdnju filozofa i filologa mogli bismo poboljšati tako da »riječ« protegnemo na »znak« pa da kažemo: *upotreba znakova čini se da je neophodno nužna za upotrebu razuma.*

U svakom slučaju, upotreba matematičkih simbola slična je upotrebi riječi. Matematički sustav znakova izgleda kao nekakav jezik, *une langue bien faite*, jezik dobro prilagođen svojoj svrsi, jezik kratak i precizan, s pravilima bez izuzetaka (za razliku od pravila obične gramatike).

S takva je stajališta POSTAVLJANJE JEDNADŽBI neka vrsta prevođenja, prevođenja s običnog jezika na jezik matematičkih simbola.

2. Neki matematički simboli, kao $+$, $-$, $=$ i mnogi drugi, imaju čvrsto tradicionalno značenje, dok se neki drugi simboli, npr. mala i velika slova latinskog i grčkog alfabeta, u raznim zadacima upotrebljavaju u različitom značenju. Započinjemo li nov zadatak, moramo odabrati izvjesne simbole, moramo *uvesti zgodne oznake*. Tu ima nešto analogno upotrebi obična govora. Mnoge riječi u raznim kontekstima upotrebljavamo u raznom značenju. Ako je važna preciznost, moramo pomno birati svoje riječi.

Izbor oznaka važan je korak u rješavanju zadatka. O njemu valja dobro razmisliti. Vrijeme utrošeno na izbor

oznaka bit će obilno nadoknađeno vremenom koje ćemo kasnije uštedjeti time što ćemo izbjeći krzmanju i zbrci. Osim toga, ako pomno biramo oznake, prisiljeni smo da oštro razmišljamo o onim elementima zadatka koje moramo označiti. Prema tome, izbor zgodnih oznaka bitno će pripomoći razumijevanju zadatka.

3. Dobro označavanje treba da je nedvosmisleno, pregnantno i lako za pamćenje. Valja izbjegavati štetna druga značenja, a izabrati korisna druga značenja. Poredak i veza znakova neka odgovaraju poretku i vezi stvari.

4. Prije svega, oznake treba da su *nedvosmislene*. Ne može se dopustiti da isti simbol u istom istraživanju označuje dvije različite stvari. Ako u rješavanju nekog zadatka neku veličinu nazovemo s a, bezuvjetno valja izbjegavati da ma što drugo što je u vezi s tim zadatkom označimo s a. Dakako, u raznim zadacima možemo slovo a upotrijebiti u raznim značenjima.

Ako je zabranjeno da isti simbol upotrebljavamo za razne objekte, nije zabranjeno da razne simbole upotrebljavamo za isti objekt. Tako se produkt brojeva a i b može pisati kao

$$a \times b \qquad a \cdot b \qquad ab$$

U nekim je slučajevima korisnije da dva različita znaka, ili više njih, upotrijebimo za isti objekt, no u takvim slučajevima moramo biti osobito oprezni. Obično je bolje da za jedan objekt upotrijebimo upravo jedan znak. Nikako pak ne valja upotrebljavati veći broj znakova lakoumno.

5. Dobra oznaka treba da je takva da je *lako zapamtimo* i lako prepoznamo. Oznaka treba da nas odmah podsjeti na stvar, a stvar na oznaku.

Jednostavan način za lako prepoznavanje oznake jest taj da se kao simbol upotrijebe početna slova. U § **20.** upotrijebili smo, na primjer, slovo t za vrijeme, V za volumen, prema latinskim riječima. Međutim, početna slova ne možemo upotrijebiti u svim slučajevima. Ne možemo, na primjer, onda ako je dotično slovo u zadatku već upotrijebljeno. Ima i drugih motiva koji ograničavaju izbor simbola. A ima i drugih načina da se simboli učine uočljivima. Razmotrit ćemo ih.

6. Oznake neće biti samo uočljive nego će i pripomoći oblikovanju naše koncepcije ako nas *poredak i veza između oznaka podsjeća na poredak i vezu između objekata*. Evo nekoliko primjera koji će ovo ilustrirati:

(I) Da označimo objekte koji su u zadatku pojmovno bliski, upotrebljavamo slova koja su u abecedi bliza.

Tako obično uzimamo slova s početka abecede, npr. a, b, c, za zadane veličine odnosno konstante, a slova sa svršetka abecede, npr. x, y, z, za nepoznate veličine odnosno varijable.

U § 8. upotrijebili smo slova a, b, c za zadane dimenzije kvadra. U tom je slučaju označavanje s a, b, c bilo bolje od označavanja pomoću inicijala $d, š, v$. Tri dimenzije imaju u zadatku istu ulogu, što se naglašava upotrebom uzastopnih slova. Osim toga, kao što smo malo prije spomenuli, a, b, c su, kao početna slova abecede, najuobičajenija slova kojima označujemo zadane veličine. U nekom drugom slučaju, gdje tri dimenzije imaju različite uloge, gdje je važno znati koje su dužine horizontalne, a koje vertikalne, bile bi bolje oznake $d, š, v$.

(II) Da bismo označili objekte koji pripadaju istoj kategoriji, često biramo slova koja pripadaju istom alfabetu, a za razne kategorije upotrebljavamo razne alfabete. Tako, na primjer, u planimetriji često upotrebljavamo:

velika latinska slova $A, B, C, \ldots$ za tačke,
mala latinska slova $a, b, c, \ldots$ za pravce i dužine,
mala grčka slova $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ za kutove.

Pojavljuju li se dva objekta koja pripadaju raznim kategorijama, ali se nalaze u nekom međusobnom odnosu, važnom za naš zadatak, možemo, radi označavanja tih objekata, odabrati odgovarajuća slova dotičnih alfabeta, npr. A i a, B i b itd. Poznat je primjer uobičajeno označavanje u trokutu:

A, B, C za vrhove,
a, b, c za stranice,
α, β, γ za kutove.

Razumljivo je da je stranica a nasuprot vrhu A, a α kut s vrhom u A.

(III) U § **20**. slova a, b, x, y bila su specijalno dobro odabrana da naznače prirodu i vezu označenih elemenata. Slova a, b nagovještavaju da su označene veličine konstantne; x, y naznačuju varijable; a je prije b kao x prije y, a to nam nagovještava da je a u istom odnosu prema b kao x prema y. Uistinu: a i x je horizontalno, b i y vertikalno, a vrijedi $a : b = x : y$.

7. Označavanje

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

kazuje da su dotična dva trokuta slična. U modernim knjigama valja ovo shvatiti tako da su ta dva trokuta slična, a vrhovi su im homologni onim redom kako su napisani, tj. A i E, B i F, C i G. U starijim knjigama nije još bio uveden dogovor o redoslijedu; čitalac je morao promatrati sliku ili se morao podsjećati dotadašnjeg izvođenja ako je htio ustanoviti koji su parovi homolognih vrhova.

Moderno označavanje mnogo je bolje od starog. Služimo li se modernim označavanjem, možemo iz formule izvesti neke zaključke, *a da sliku ne promatramo*. Tako, na primjer, možemo izvesti

$$\sphericalangle A = \sphericalangle E$$

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{EF} : \overline{FG}$$

i daljnje takve odnose. Stariji način označavanja izražava manje i ne dopušta takve određene zaključke.

Označavanje koje izražava više od nekog drugog možemo nazvati *pregnantnijim*. Moderno označavanje sličnosti trokuta pregnantnije je od starog; ono potpunije odražava poredak i vezu stvari, pa stoga može poslužiti kao baza za veći broj zaključaka.

8. Riječi imaju *druga značenja*. Izvjesni konteksti, u kojima se često upotrebljava neka riječ, utječu na nju i pridaju primarnom značenju te riječi neku nijansu, neko drugo značenje, »nuzznačenje«. Kad pažljivo formuliramo, nastojimo da

između riječi koje imaju otprilike jednako značenje odaberemo onu riječ kojoj je drugo značenje najprikladnije.

Nešto slična pojavljuje se u matematičkom označavanju. I matematički simboli mogu iz kontekstova u kojima se često upotrebljavaju steći nekakvo drugo značenje. Odabiremo li pažljivo oznake, moramo voditi računa o toj okolnosti. Objasnit ćemo ovo pobliže.

Neka slova stekla su čvrsto ukorijenjeno, tradicionalno značenje. Tako, na primjer, *e* obično označuje bazu prirodnih logaritama, slovo *i* upotrebljava se za $\sqrt{-1}$ (imaginarnu jedinicu), a π za omjer kružnog opsega prema polumjeru. Uglavnom je bolje da takve simbole upotrebljavamo u njihovu tradicionalnom značenju. Ako takav simbol upotrebljavamo u drugačijem, netradicionalnom značenju, moglo bi se njegovo tradicionalno značenje katkad umiješati i zbuniti ili čak zavesti. Svakako da će takva štetna »nuzznačenja« manje smetati početnika koji još nije studirao mnoga područja nego iskusnog matematičara. Ovaj bi pak morao imati dovoljno iskustva da se takvih smetnji oslobodi.

»Nuzznačenja« simbola mogu biti i korisna, dapače i vrlo korisna ako se taktički upotrebljavaju. Označavanje, upotrijebljeno u ranijim prilikama, može nam pomoći da se sjetimo nekog korisnog postupka. Dakako, pri tom moramo biti dovoljno pažljivi pa da sadašnje (primarno) značenje simbola oštro razlučimo od njegova prijašnjeg (sekundarnog) značenja. *Ustaljene oznake* [npr. tradicionalne oznake za dijelove trokuta, spomenute pod 6 (II)] imaju velike prednosti. Ako su one već bile upotrijebljene u nekim ranijim prilikama, pomažu nam da se podsjetimo raznih, ranije upotrijebljenih, postupaka. I formule pamtimo izražene nekim ustaljenim znakovima. Razumije se da moramo biti dovoljno pažljivi ako smo zbog nekih naročitih okolnosti prisiljeni da se ustaljenim oznakama koristimo u značenju koje je donekle različito od uobičajenog.

9. Imamo li birati između dviju oznaka, može jedan razlog govoriti za jednu oznaku, a drugi razlog za neku drugu. Da bismo odabrali zgodniju oznaku, potrebno nam je iskustvo i ukus, kao što nam je potrebno iskustvo i ukus pri izboru zgodnih riječi. Ipak je dobro da poznamo razne koristi i štete o kojima smo dosad raspravljali. U svakom slučaju potrebno je da pažljivo biramo svoje oznake, a za svoj obzir da imamo *neki dobar razlog*.

10. Ne samo najbeznadniji momci u razredu, već i inteligentniji učenici mogu osjećati antipatiju prema algebri. U označavanju ima uvijek nešto samovoljno i izvještačeno; učenje nove oznake opterećuje memoriju. Inteligentan učenik nećka se da preuzme teret ako za to ne vidi neku kompenzaciju. Antipatija inteligentnog učenika prema algebri jest opravdana ako mu se ne pruži dovoljno prilike da se na vlastitom iskustvu uvjeri kako *jezik matematičkih simbola pomaže razumu*. Pomoći mu da dođe do takva iskustva važan je zadatak nastavnikov, jedan od njegovih najvažnijih zadataka.

Kažem da je to važan zadatak, no ne kažem da je lak. Prethodne primjedbe mogle bi tu donekle koristiti. Vidi i POSTAVLJANJE JEDNADŽBI. Kao osobito poučna vježba preporučuje se da se jedna formula kontrolira iscrpnom diskusijom njenih svojstava; vidi § **14.** i MOŽEŠ LI KONTROLIRATI REZULTAT?, 2.

Papus, poznati grčki matematičar, živio je vjerojatno oko 300. godine U sedmoj knjizi svojih *»Collectiones«* Papus izvještava o jednoj disciplini, koju on naziva *ἀναλυόμενος*. Ovaj naziv mogli bismo prevesti kao »riznica analize«, ili kao »umijeće rješavanja zadataka«, ili upravo kao »heuristika«. Posljednji izraz kao da bi najbolje odgovarao. Lako je pristupačan jedan dobar engleski prijevod Papusova izvještaja[5]. Evo slobodnog prijevoda originalnog teksta:

»Takozvana heuristika jest, kratko rečeno, posebna naučna disciplina za upotrebu onima koji — pošto su već proučili opće elemente — hoće steći vještinu rješavanja matematičkih zadataka, i to je jedina korist ove discipline. Ona je djelo trojice: Euklida, autora »Elemenata«, Apolonija

[5] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge 1908, sv. 1, str. 138.

iz Perge i Aristeja Starijeg. Ona uči postupcima analize i sinteze.

U analizi polazimo od traženog i uzimamo kao da je to već dokazano. Iz ovoga izvodimo zaključke i zaključke iz zaključaka dok ne dođemo do neke tačke koju možemo upotrijebiti kao polaznu tačku sinteze. U analizi naime uzimamo ono što treba učiniti kao već učinjeno (traženo — kao već nađeno, ono što valja dokazati — kao istinito). Istražujemo od čega bi prethodnog mogao potjecati traženi rezultat. Zatim ispitujemo što bi prethodnom još dalje moglo prethoditi, i tako dalje, sve dok u vraćanju ne naiđemo napokon na nešto što je već poznato ili se smije priznati kao istinito. Ovakav postupak zovemo analizom ili rješavanjem natraške ili regresivnim zaključivanjem.

U sintezi, obratno, polazimo od one tačke koja je u analizi bila posljednja, od onoga što je već poznato ili se smije priznati kao istinito. Odavde izvodimo ono što je u analizi dolazilo prije i nastavljamo, idući istim putem, sve dok napokon ne dođemo do traženog. Ovakav postupak zovemo sintezom ili konstruktivnim rješavanjem ili progresivnim zaključivanjem.

Postoje dvije vrste analize. Prva je analiza ‚dokaznih zadataka', koja teži za postavljanjem istinitih teorema. Druga je analiza ‚odredbenih zadataka', koja teži za pronalaženjem nepoznanice.

Imamo li ‚dokazni zadatak', traži se da jasno formuliran teorem A ili dokažemo ili opovrgnemo. Mi još ne znamo da li je teorem A istinit ili pogrešan, no izvodimo iz A neki drugi teorem B, iz B teorem C, itd., sve dok ne dođemo do nekog posljednjeg teorema L, o kojem posve određeno znamo da li je istinit ili nije. Ako je L istinit, bit će istinit i A, uz uvjet da su svi naši izvodi konvertibilni, obratljivi. Iz L dokazujemo teorem K, koji je u analizi dolazio prije L, i nastavljamo tako idući istim putem; iz C dokazujemo B, iz B dokazujemo A, te tako postižemo cilj. Ako je, međutim, teorem L pogrešan, dokazali smo da je i A pogrešan.

Imamo li ‚odredbeni zadatak', traži se da nađemo izvjesnu nepoznanicu x koja zadovoljava jasno formuliran uvjet. Mi

još ne znamo da li je moguće zadovoljiti uvjet ili nije, no, uzimajući da postoji x, koje zadovoljava propisani uvjet, izvodimo iz njega neku drugu nepoznanicu y, koja mora zadovoljavati neki srodan uvjet. Zatim izvodimo iz y neku daljnju nepoznanicu, itd., sve dok ne dođemo do neke posljednje nepoznanice z, koju umijemo naći nekom poznatom metodom. Nađemo li zaista z, koje udovoljava svom uvjetu, postojat će i x, koje udovoljava prvobitnom uvjetu, ako su svi naši izvodi konvertibilni, obratljivi. Nađemo najprije z; kad znamo z, nađemo nepoznanicu koja je u analizi dolazila prije z i nastavljamo tako idući istim putem; najzad, znajući y, dobivamo x i tako postižemo cilj. Ako, međutim, ne postoji ništa što bi udovoljavalo uvjetu propisanom za z, zadatak o nepoznanici x nema rješenja.«

Ne smijemo zaboraviti da ovo što smo citirali nije doslovan već slobodan prijevod, *parafraza*. Zbog važnosti Papusova teksta različite razlike između originala i parafraze zavređuju komentar.

1. Naša parafraza upotrebljava određeniju terminologiju nego što to čini original, te uvodi simbole $A, B, \ldots, L, x, y, \ldots, z$, kojih u originalu nema.

2. Parafraza spominje (str. 99, redak 32) »matematičke zadatke«, gdje original misli na »geometrijske zadatke«. Time se želi naglasiti da postupci što ih je Papus opisao nisu nipošto ograničeni na geometrijske zadatke; oni zapravo nisu ograničeni ni na matematičke zadatke. Ilustrirat ćemo ovo na primjerima, zbog važnosti što ih ovdje imaju općenita valjanost i neovisnost o naravi objekta (vidi § 3).

3. *Algebarski primjer.* Odredi x koje zadovoljava jednadžbu

$$8\,(4^x + 4^{-x}) - 54\,(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

Ovo je »odredbeni zadatak«, koji za početnika nije prelagan. On treba da dobro poznaje ideju analize, dakako ne riječ »analiza«, već ideju da se cilj postigne višekratnim reduciranjem. Osim toga, mora poznavati najjednostavnije tipove jednadžbi. Pa i uz izvjesna znanja opet će trebati dobra ideja, nešto sreće, malko domišljatosti, pa da se nađe da je zbog $4^x = (2^x)^2$ i $4^{-x} = (2^x)^{-2}$ korisno uvesti

$$y = 2^x$$

Ova je supstitucija uistinu korisna jer se jednadžba za y

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

čini jednostavnijom od prvobitne. No, sa zadatkom još nismo gotovi. Potrebno nam je još jedno malo otkriće, druga supstitucija

$$z = y + \frac{1}{y}$$

koja uvjet preinačuje u

$$8\,z^2 - 54\,z + 85 = 0$$

Ovdje prestaje analiza ako rješavač zna rješavati kvadratne jednadžbe.

Što je sinteza? Postepeno provođenje računa na koje je upozorila analiza. Rješavaču nije više potrebna nikakva nova ideja da bi dovršio zadatak, već samo nešto strpljenja i pažnje u izračunavanju raznih nepoznanica. Redoslijed računanja obrnut je redoslijedu otkrivanja: najprije se nađe z ($z = 5/2$, $17/4$), zatim y ($y = 2$, $1/2$, 4, $1/4$) i najzad originalna nepoznanica x ($x = 1, -1, 2, -2$). Sinteza se vraća tragovima analize. U ovom našem slučaju lako se razabire zašto tako radi.

4. *Nematematički primjer*. Domorodac želi da prijeđe preko potoka. On to ne može na uobičajeni način jer je voda preko noći narasla. Prema tome, prijelaz je postao tema zadatka; »prijelaz potoka« je x u ovom jednostavnom zadatku. Čovjek će se možda sjetiti da je jednom prešao potok hodajući preko nekog oborenog stabla. Obazire se za zgodnim oborenim stablom koje postaje njegova nova nepoznanica, njegovo y. On ne može naći nijedno takvo zgodno stablo, ali duž potoka raste mnogo drveća; on zaželi da jedno od njih bude oboreno. Može li on postići da stablo padne poprijeko preko potoka?

To je značajna ideja. Evo nove nepoznanice! Kako da prevali stablo preko potoka?

Ovaj lanac misli valja nazvati analizom ako prihvatimo Papusovu terminologiju. Ako domorodac uspije da dovrši svoju analizu, moguće je da postane izumitelj mosta i sjekire. Što će biti sinteza? Pretvaranje misli u djela. Završna radnja sinteze jest prijelaz preko potoka po deblu.

Isti objekti ispunjaju analizu i sintezu. Tim se objektima bavi čovjekov mozak u analizi, a njegove mišice u sintezi. Analiza se sastoji u mislima, sinteza u djelima. Još je jedna razlika: redoslijed je obrnut. Prijelaz potoka je prva želja od koje polazi analiza, a posljednja radnja kojom završava sinteza.

5. U parafrazi dolazi do izražaja, jače nego u originalu, prirodna povezanost analize i sinteze. Prethodni su primjeri jasno pokazali vezu. Prirodno je da analiza dolazi prije, a sinteza kasnije. Analiza je pronalaženje, sinteza izvršavanje; *analiza je stvaranje plana, sinteza je njegovo provođenje*.

6. Parafraza zadržava, pa čak i naglašava izvjesne čudne rečenice originala: »uzimamo óno što treba učiniti — kao već učinjeno, traženo — kao već nađeno, ono što valja dokazati — kao istinito«. To je paradoksalno. Nije li čisto samoobmanjivanje uzeti da je zadatak koji moramo riješiti već riješen? Nejasno je; što se time misli? Međutim, ako pomno promotrimo kontekst i ako pravilno zahvatimo svoje vlastito iskustvo u rješavanju zadataka, neizvjesnosti će nestati.

Razmotrit ćemo najprije »odredbeni zadatak«. Nepoznanica neka je x, a zadani podaci a, b, c. »Zadatak uzeti kao već riješen« znači uzeti, pretpostaviti da postoji objekt x koji zadovoljava uvjet — tj. koji je s podacima a, b, c povezan onako kako to propisuje uvjet. Ovo se pretpostavlja upravo zato da se pokrene analiza. Pretpostavka je privremena i bezazlena. Jer *ako* ne postoji nikakav takav objekt *i ako* nas analiza nekamo vodi, ona nas nužno vodi do jednog posljednjeg zadatka koji nema rješenja, pa je odatle tada vidljivo da naš prvobitni zadatak nema rješenja. Nadalje, pretpostavka je korisna. Da bismo istražili uvjet, moramo zahvatiti, zamisliti ili geometrijski predočiti veze između x i a, b, c, koje nam uvjet propisuje. Kako da to učinimo ako x ne zamislimo ili ne predočimo kao da postoji? Najzad, takva je pretpostavka prirodna. Domorodac čije smo misli i djela izložili u bilješci 4 zamišlja kako ide po oborenom stablu i prelazi tako potok, i to davno prije nego što to stvarno može učiniti; on vidi svoj zadatak »kao već riješen«.

U »dokaznom zadatku« treba dokazati izvjestan teorem *A*. Savjet da »*A* uzmemo kao istinito« upravo je poziv da iz teorema *A* izvodimo konzekvencije, iako ga još nismo dokazali. Ljudi izvjesnog mentaliteta ili zastupnici izvjesne filozofije možda će ustuknuti pred tim da povlače konzekvencije iz nekog nedokazanog teorema. Takvi ne mogu započeti analizu.

Usporedi: SLIKE, 2.

7. Parafraza dvaput spominje uvjet: »da su svi naši izvodi konvertibilni, obratljivi« (vidi str. 100, redak 31. i str. 101, redak 8). Tu imamo umetanje; u originalu nema ništa od toga. Tek je u novije vrijeme ustanovljeno i kritizirano pomanjkanje ove rezerve. Za pojam »obratljive redukcije« vidi: POMOĆNI ZADATAK, 6.

8. Analiza »dokaznih zadataka« objašnjena je u parafrazi posve drugim riječima nego u originalu, ali se smisao nije ništa promijenio, bar se nije namjeravao mijenjati. Međutim, analiza »odredbenih zadataka« objašnjena je u parafrazi konkretnije nego u originalu. Čini se da je original usmjeren na opisivanje ponešto općenitijeg postupka: konstrukcije jednog *lanca ekvivalentnih pomoćnih zadataka*. Takav lanac opisan je u članku POMOĆNI ZADATAK, 7.

9. Mnogi elementarni udžbenici geometrije sadrže neke napomene o analizi, sintezi i o »pretpostavci da je zadatak već riješen«. Vrlo se malo može posumnjati u to da ova gotovo neiskorjenjiva tradicija seže unatrag do Papusa, iako — vjerojatno — mali broj autora današnjih udžbenika neposredno poznaje Papusa. Tema je dovoljno važna da bude spomenuta u elementarnim udžbenicima, ali se lako pogrešno shvaća. Već sama okolnost da je ograničena na geometrijske udžbenike pokazuje da općenito nema dovoljno razumijevanja; vidi bilješku 2. Kad bi prethodna razmatranja mogla pridonijeti

boljem razumijevanju ovih stvari, ona bi dobro opravdala svoju duljinu.

Novi primjer, drugo stajalište i daljnje komentare vidi u članku RADITI NATRAŠKE.

Usporedi i: REDUCTIO AD ABSURDUM I INDIREKTAN DOKAZ, 2.

Paradoks pronalazača. Širi plan može imati više izgleda da uspije.

Ovo zvuči paradoksalno. Ipak, prelazeći od jednog zadatka na drugi, često možemo zapaziti da novim, širim zadatkom možemo vladati lakše nego prvobitnim zadatkom. Na više pitanja možemo odgovoriti lakše nego na jedno jedino. Opsežniji teorem možemo lakše dokazati, općenitiji zadatak lakše riješiti.

Paradoks nestaje ako pobliže razmotrimo neke primjere (GENERALIZACIJA, 2; INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA, 7). Širi plan može imati više izgleda da uspije, uz uvjet da se ne temelji na pukim pretenzijama, već na izvjesnom pronicanju stvari onkraj neposredno vidljivog.

Pedanterija i majstorstvo dva su oprečna stava prema pravilima.

1. Neko pravilo primjenjivati doslovno, kruto, slijepo, u slučajevima kad je to umjesno i kad to nije — jest pedanterija. Neki su pedanti jadne budale; oni nisu nikad razumjeli pravilo, koje primjenjuju tako savjesno i jednoobrazno. Neki pedanti posve uspijevaju; oni su razumjeli svoje pravilo bar u početku (prije nego su postali pedantni), a odabrali su upotrebljivo pravilo, koje je u mnogo slučajeva umjesno, i samo katkad zataji.

Neko pravilo primjenjivati s prirodnom lakoćom, razmišljajući, pazeći na slučajeve gdje je ono umjesno, primjenjivati ga tako da nikad riječi pravila ne sakriju svrhu radnje ili povoljne mogućnosti u nekoj situaciji — jest majstorstvo.

2. Pitanja i preporuke naše tabele mogu koristiti i rješavačima zadataka i nastavnicima. No, najprije ih valja shvatiti, valja naučiti kako se pravilno upotrebljavaju, naučiti u pokušavanju i lutanju, preko neuspjeha i uspjeha, stječući iskustva u njihovoj primjeni. A zatim: upotreba tih pitanja i

preporuka nikad ne smije prijeći u pedanteriju. Ne valja pitati ili preporučivati jednoobrazno, po nekoj ustaljenoj, krutoj navici. Valja biti spreman na razna pitanja i preporuke i promisliti o njihovoj upotrebljivosti. Ako je zadatak težak i uzbudljiv, naš naredni korak treba da je potaknut pažljivim i nepristranim razmatranjem danog zadatka. Želimo li učeniku pomoći, treba da ono što mu kažemo da proistječe iz suosjećajnog razumijevanja njegovih teškoća.

A ako si sklon tome da budeš pedantan, pa ti je potrebno da se osloniš na neko pravilo, tada upamti pravilo: Upotrijebi uvijek najprije vlastiti razum!

Podsvjestan rad. Jedne večeri htio sam diskutirati sa svojim prijateljem o nekom piscu, ali se nisam mogao dosjetiti njegova imena. Ljutilo me jer sam se vrlo dobro sjećao jedne njegove novele. Sjećao sam se i jedne pripovijesti o samom tom piscu, koju sam htio ispričati; sjećao sam se u stvari svega, osim imena. Ponovo, nekoliko puta sam pokušavao da se sjetim imena, no sve bijaše uzalud. Narednog jutra, čim sam pomislio na nepriliku prošle večeri, sinulo mi je ime bez ikakva napora.

Čitalac će se, vrlo vjerojatno, sjetiti sličnih vlastitih iskustava. Strastveni rješavači zadataka imali su, po svoj prilici, sličnih iskustava sa zadacima. Često se dešava da nemamo nikakva uspjeha u rješavanju svog zadatka; radimo intenzivno, a ništa ne nalazimo. Međutim, kad se zadatku vratimo poslije noćnog odmora ili nakon prekida od nekoliko dana, pojavljuje se iznenada sjajna ideja i zadatak možemo lako riješiti. Vrsta zadatka znači pri tom malo; na taj način mogu sinuti: i zaboravljena riječ, i teška riječ u križaljci, i početak nekog neugodnog pisma, i rješenje matematičkog zadatka.

Takvi događaji daju utisak *podsvjesnog rada.* Činjenica jest da se jedan zadatak, pošto je neko vrijeme bio odsutan, može vratiti u svijest bitno jasniji, znatno bliži svom rješenju nego što je bio kad je ispao iz svijesti. Tko ga je bistrio, tko ga je približio rješenju? Očito: čovjek sam, radeći *podsvjesno.* Teško je dati neki drugi odgovor, iako su psiholozi otkrili početke drugog odgovora, koji bi jednog dana mogao bolje zadovoljiti.

Ma koje bile ili ne bile zasluge teorije o podsvjesnom radu, sigurno je da postoji granica preko koje ne valja forsirati svjesno razmišljanje. Ima izvjesnih momenata kad je bolje da zadatak neko vrijeme pustimo na miru. »Starije je jutro od večera« stari je savjet. Priuštimo li i zadatku i sebi nešto odmora, sutra ćemo, uz manje napora, postići više. »Što danas ne bude, bit će sutra« — druga je stara poslovica. No, poželjno je da zadatak na koji se kasnije želimo vratiti ne odložimo bez utiska da je nešto izvršeno. Prije nego ostavimo posao, treba da uredimo bar neko malo mjesto, treba da bar donekle razjasnimo neke aspekte pitanja.

Poboljšani se vraćaju samo takvi problemi čije rješenje strasno želimo, odnosno oko kojih vrlo napeto radimo. Bez svjesna napora i napetosti kao da se ne može pokrenuti podsvjestan rad. Svakako, bilo bi previše lagano kad to ne bi bilo tako: teške zadatke mogli bismo onda rješavati tako da spavamo i čekamo sjajnu ideju.

Minula stoljeća smatrala su dobru ideju inspiracijom, darom bogova. Takav dar valja zaslužiti radom ili bar žarkom željom[6].

Pomoćni elementi. Zadatak shvaćamo sve bolje čim se njime dulje bavimo (NAPREDAK I DOSTIGNUĆE, 1). Napredujući u svom poslu, mi elementima koje smo prvobitno razmatrali dodajemo nove elemente. Element koji uvodimo u nadi da će pospješiti rješenje zove se *pomoćni element.*

1. Ima raznih vrsta pomoćnih elemenata. Rješavajući geometrijski zadatak, možemo u svoju sliku uvesti nove crte, takozvane *pomoćne crte.* Rješavajući algebarski zadatak, možemo uvesti *pomoćnu nepoznanicu* (POMOĆNI ZADATAK, 1). *Pomoćni teorem* je teorem kojim potpomažemo rješavanje prvobitnog zadatka.

2. Postoje različiti razlozi za uvođenje pomoćnih elemenata. Drago nam je ako nam uspije sjetiti se nekog *zadatka koji je srodan našem, a već je riješen.* Vjerojatno je da bismo takav zadatak mogli upotrijebiti, samo još ne znamo kako.

---

[6] Pitanje »podsvjesnog mišljenja« svestrano je osvijetlio Jacques Hadamard u »*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*«.

Uzmimo da je naš zadatak koji rješavamo geometrijski, a srodan riješeni zadatak, koga smo se sad sjetili, jedan je zadatak o trokutima. Međutim, u našoj slici nema trokuta. Da bismo nekako upotrijebili zadatak na koji smo se sjetili, moramo imati trokut; stoga ćemo ga uvesti crtajući u slici prikladne pomoćne crte. Uopće, ako smo se sjetili nekog srodnog, već riješenog zadatka, te bismo ga htjeli upotrijebiti u svom sadašnjem zadatku, često ćemo se morati pitati: *Ne bismo li uveli neki pomoćni element da uzmognemo upotrijebiti taj zadatak?* (Primjer u § **10.** je tipičan).

Vraćanje na definicije jest druga prilika za uvođenje pomoćnih elemenata. Dajući, na primjer, definiciju kružnice, ne samo da moramo spomenuti središte i polumjer, već i u svoju sliku ucrtati te geometrijske elemente. Bez takva ucrtavanja ne možemo konkretno upotrijebiti definiciju. Definicija bez crtanja — prazna je riječ bez efekta.

Upotreba poznatih rezultata i vraćanje na definicije valjani su razlozi za uvođenje pomoćnih elemenata, ali nisu jedini. Možemo uvoditi pomoćne elemente u koncepciju svog zadatka da bismo ga učinili potpunijim, sugestivnijim i poznatijim, iako tada jedva još izričito znamo kako ćemo moći upotrijebiti nove elemente. Mi ćemo možda tek osjetiti da je dobra ideja što smo zadatak shvatili na taj način, s tim i tim novim elementima.

Za uvođenje pomoćnog elementa možemo imati ovaj ili onaj razlog. Glavno je da imamo razlog. Ne treba uvoditi pomoćne elemente lakoumno.

3. *Primjer*. Konstruirati trokut ako je zadano: jedan kut, visina iz vrha toga kuta i opseg trokuta.

Uvest ćemo zgodne oznake. Zadani kut označit ćemo sa α, zadanu visinu iz vrha A sa v, a zadani opseg sa p. *Nacrtat ćemo sliku* u koju ćemo lako smjestiti α i v. *Jesmo li iskoristili sve zadano?* Nismo, jer naša slika još ne sadrži zadanu dužinu p, koja je jednaka opsegu trokuta. Prema tome, moramo uvesti p. No kako?

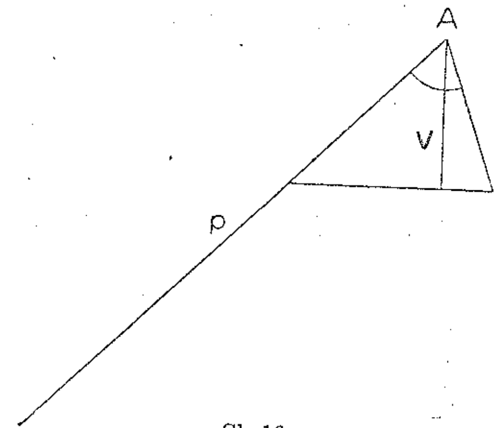
Pokušat ćemo uvesti p na razne načine. Pokušaji, prikazani na slikama 16. i 17, čine se nezgrapnima. Ako pokušamo

objasniti zašto nas ne zadovoljavaju, opazit ćemo da je to zbog pomanjkanja simetrije.

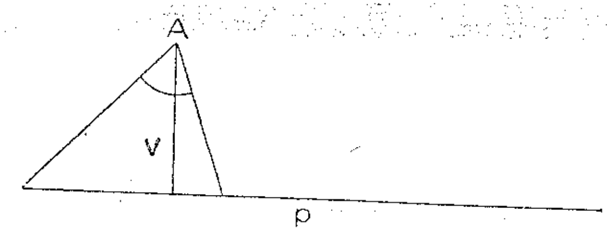
Zaista: trokut ima tri nepoznate stranice a, b, c. Stranicu koja leži nasuprot vrhu A označit ćemo, po običaju, sa a. Znamo da je

$$a + b + c = p$$

Stranice b i c imaju istu ulogu, one se mogu međusobno zamijeniti, naš je zadatak simetričan s obzirom na b i c. Među-



Sl. 16.



Sl. 17.

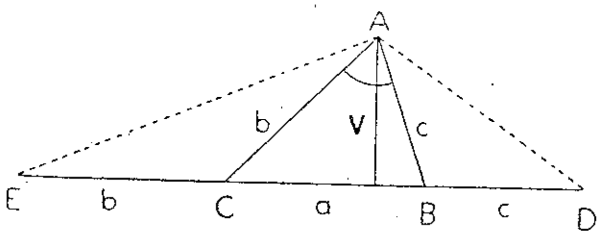
tim, b i c nemaju istu ulogu u našim slikama 16. i 17. Smještavajući dužinu p, mi smo različito postupali sa b i c; slike 16. i 17. kvare prirodnu simetriju zadatka s obzirom na b i c.

Dužinu p moramo postaviti tako da bude prema b i prema c podjednako smještena.

Ovo nas rasuđivanje može potaknuti na to da dužinu p smjestimo kao na slici 18. Dodamo stranici a dužinu $\overline{CE}$ duljine b na jednu stranu, a dužinu $\overline{BD}$ duljine c na drugu stranu tako da se p na slici 18. pojavljuje kao dužina $\overline{ED}$ duljine

$$b + a + c = p$$

Imamo li nešto malo iskustva u rješavanju konstruktivnih zadataka, svakako ćemo, zajedno s dužinom $\overline{ED}$, uvesti u sliku i pomoćne dužine $\overline{AD}$ i $\overline{AE}$, od kojih je svaka baza jednog jednakokračnog trokuta. Zaista nije nerazumno ako u zadatak uvodimo takve jednostavne i poznate elemente kao što su to jednakokračni trokuti.



Sl. 18.

Uvođenje naših pomoćnih dužina pokazuje se prikladnim. Ispitujući novu sliku, otkrit ćemo da je $\sphericalangle EAD$ u vrlo jednostavnoj vezi sa zadanim kutom a. Naći ćemo, naime, upotrijebivši jednakokračne trokute $\triangle ABD$ i $\triangle ACE$ da je $\sphericalangle DAE = \frac{a}{2} + 90^0$. Pošto ovo ustanovimo, prirodno je da pokušamo konstruirati trokut $\triangle DAE$. Time uvodimo pomoćni zadatak koji je znatno lakši od prvobitnog zadatka.

4. Nastavnici i autori udžbenika ne smiju zaboraviti da se inteligentan učenik i INTELIGENTAN ČITALAC ne zadovoljavaju time da se dokaže da se provjeri ispravnost svih koraka u nekom zaključivanju, već žele znati motive i svrhu

raznih koraka. Uvođenje pomoćnog elementa upadljiv je korak. Pojavi li se u slici neka lukava pomoćna crta naprečac, bez ikakve motivacije, te ista iznenada riješi zadatak, inteligentni učenici i čitaoci su razočarani; osjećaju se prevarenima. Matematika je interesantna ukoliko zaokuplja naše umne i stvaralačke snage. No, ni um ni stvaralaštvo nemaju što da nauče ako ostaju nerazumljivi motivi i svrha najupadljivijeg koraka. Treba mnogo vremena i napora da se takvi koraci objasne zgodnim primjedbama (kao malo prije pod 3) ili brižno probranim pitanjima i preporukama (kao u §§ **10**, **18**, **19**, **20**) — no trud se isplati.

Pomoćni zadatak je zadatak koji razmatramo ne radi njega samog već zato što se nadamo da će nam razmatranje tog zadatka pomoći u rješavanju drugog zadatka, našeg prvobitnog zadatka. Prvobitan zadatak je naš cilj kome težimo, a pomoćni je zadatak sredstvo kojim nastojimo postići svoj cilj.

Kukac nastoji pobjeći kroz prozorsko staklo. Neprestano pokušava isto, a ne pokušava kroz susjedni prozor koji je otvoren i kroz koji je uletio u sobu. Čovjek je sposoban, ili bi bar morao biti sposoban da postupa pametnije. Čovjekova nadmoć sastoji se u tome što umije zaobići zapreku koju ne može svladati direktno, što umije smisliti prikladan pomoćni zadatak ako mu se prvobitan zadatak čini nerješiv. Smisliti pomoćni zadatak — važna je umna operacija. Postaviti jasno definiran nov zadatak, koji služi nekom drugom zadatku, shvatiti jasno kao cilj ono što je sredstvo za neki drugi cilj — istančano je dostignuće inteligencije. Stoga je važno učiti (ili poučavati) kako se pametno radi s pomoćnim zadacima.

1. *Primjer*. Odredi x koje zadovoljava jednadžbu

$$x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$$

Uzmemo li u obzir da je $x^4 = (x^2)^2$, razabrat ćemo da je korisno uvesti

$$y = x^2$$

Sad smo dobili novi zadatak: Odrediti y koje zadovoljava jednadžbu

$$y^2 - 13\,y + 36 = 0$$

Novi zadatak jest pomoćni zadatak. Namjeravamo ga upotrijebiti kao sredstvo rješavanja svoga prvobitnog zadatka. Zgodno je da se nepoznanica y našega pomoćnog zadatka nazove *pomoćnom nepoznanicom.*

2. *Primjer.* Odrediti treba duljinu dijagonale pravokutnog paralelepipeda ako su zadane duljine triju bridova koji izlaze iz istog vrha.

Pokušamo li riješiti taj zadatak (§ 8), možemo analogijom (§ **15**) doći do drugog zadatka: Odrediti duljinu dijagonale pravokutnog paralelograma ako su zadane duljine dviju stranica koje izlaze iz istog vrha.

Novi zadatak jest pomoćni zadatak. Razmatramo ga jer se nadamo da ćemo iz tog razmatranja izvući neke koristi za prvobitni zadatak.

3. *Korist.* Korist od razmatranja pomoćnog zadatka može biti raznolika. Mi možemo upotrijebiti *rezultat* pomoćnog zadatka. Tako u primjeru 1, pošto smo rješavanjem kvadratne jednadžbe našli da je y ili 4 ili 9, zaključujemo da je $x^2 = 4$ ili $x^2 = 9$, pa odatle izvodimo sve moguće vrijednosti za x. U drugim pak slučajevima možemo upotrijebiti *metodu* pomoćnog zadatka. Tako je u primjeru 2. pomoćni zadatak planimetrijski zadatak, analogan prvobitnom stereometrijskom zadatku, no jednostavniji. Pametno je uvesti takav pomoćni zadatak. Uvodeći ga, nadamo se da će biti instruktivan, da će nam pružiti prilike za upoznavanje s izvjesnim metodama, operacijama ili sredstvima, koja ćemo kasnije moći upotrijebiti za svoj prvobitni zadatak. U primjeru 2. pomoćni je zadatak izabran čak vrlo prikladno. Ako ga pomno ispitamo, naći ćemo da se može upotrijebiti i njegova metoda i njegov rezultat. (Vidi § **15.** i DA LI SI ISKORISTIO SVE ZADANO?)

4. *Riziko.* Vrijeme i napor što ih ulažemo u pomoćni zadatak oduzimamo od prvobitnog zadatka. Ako naše istraživanje pomoćnog zadatka promaši, tada su vrijeme i napor, uloženi u nj, izgubljeni. Moramo se dakle vježbati u razboritom odabiranju pomoćnog zadatka. Za svoj izbor možemo imati razne dobre razloge. Pomoćni zadatak može nam se činiti pristupačniji od prvobitnog zadatka, ili instruktivniji, ili nas pak može privlačiti s neke estetske strane. Katkad je jedina prednost pomoćnog zadatka ta da je nov i da nam pruža neistražene mogućnosti; biramo ga jer nam je dodijao prvobitni zadatak, gdje su, čini se, iscrpene sve mogućnosti zahvaćanja.

5. *Kako naći pomoćni zadatak?* Otkriće rješenja postavljenog zadatka ovisi često o otkriću zgodnog pomoćnog zadatka. Na žalost, nema nepogrešive metode za otkrivanje zgodnih pomoćnih zadataka, kao što nema ni nepogrešive metode za iznalaženje rješenja. Ipak, postoje neka pitanja i preporuke, koje često koriste, npr. PROMOTRI NEPOZNANICU! I VARIJACIJA ZADATKA često nas vodi do korisnih pomoćnih zadataka.

6. *Ekvivalentni zadaci.* Dva su zadatka *ekvivalentna* ako rješenje svakog od njih uključuje i rješenje onog drugog zadatka. Ekvivalentni su, na primjer, prvobitni i pomoćni zadatak u primjeru 1.

Razmotri ove teoreme:

A. U trokutu jednakih stranica svaki kut iznosi 60^0.

B. U trokutu jednakih kutova svaki kut iznosi 60^0.

Ova dva teorema nisu identična. Oni sadrže razne pojmove; prvi se bavi jednakošću stranica, a drugi jednakošću kutova u trokutu. Međutim, svaki od ta dva teorema proizlazi iz onog drugog. Stoga je zadatak »dokazati A« ekvivalentan zadatku »dokazati B«.

Traži li se od nas da dokažemo A, bit će od izvjesne koristi ako kao pomoćni zadatak uvedemo dokazni zadatak B. Teorem B nešto se lakše dokazuje od A, a — što je još važnije — možemo *predvidjeti* da je B lakši od A, mi to možemo prosuditi, možemo već od početka smatrati plauzibilnijim da je B lakši od A. Zaista, teorem B koji se bavi samo kutovima »homogeniji« je od teorema A koji se bavi i kutovima i stranicama.

Prijelaz od prvobitnog zadatka na pomoćni zadatak zove se *konvertibilna* (obratljiva) redukcija, *dvostrana* redukcija ili *ekvivalentna* redukcija ako su oba zadatka (prvobitni i pomoćni) ekvivalentna. Tako je, na primjer, redukcija od A na B (vidi gore) obratljiva, a isto tako i redukcija u primjeru 1. Obratljive redukcije u izvjesnom su pogledu važnije i poželjnije od ostalih mogućnosti da se uvede pomoćni zadatak, ali i pomoćni zadaci koji nisu ekvivalentni prvobitnom zadatku mogu biti vrlo korisni; vidi primjer 2.

7. *Lanci ekvivalentnih pomoćnih zadataka* pojavljuju se često u matematičkom zaključivanju. Treba da riješimo zadatak A. Ne možemo razabrati rješenje, ali možemo naći da je A ekvivalentan nekom drugom zadatku B. Razmatramo li B, možemo doći do trećeg zadatka C, koji je ekvivalentan zadatku B. Nastavljajući na isti način, prevodimo C u D, i tako dalje, dok ne dođemo do posljednjeg zadatka L, kojemu je rješenje poznato ili posve blizu. Budući da je svaki zadatak ekvivalentan prethodnom, mora posljednji zadatak L biti ekvivalentan našem prvobitnom zadatku A. Tako možemo o rješenju zadatka A zaključiti iz zadatka L, koji smo dobili kao posljednju kariku u lancu pomoćnih zadataka.

Lance takvih zadataka spominju već grčki matematičari, kako se to može razabrati iz jednog važnog mjesta kod PAPUSA. Radi ilustracije razmotrit ćemo još jednom primjer 1. Uvjet kome je podvrgnuta nepoznanica x označimo sa (A):

(A) $$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Jedan način rješavanja ovog zadatka bio bi da zadani uvjet preinačimo u drugi uvjet (B):

(B) $$(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 144 = 0$$

Valja primijetiti da su uvjeti (A) i (B) različiti. Oni se, mogli bismo reći, samo neznatno razlikuju, oni su svakako ekvivalentni (o čemu se lako možemo uvjeriti), ali je posve sigurno da nisu identični. Prijelaz od (A) na (B) ne samo da je ispravan već on ima i svoju jasno određenu svrhu, koju lako uočava svatko tko zna rješavati kvadratne jednadžbe. Radimo

li dalje u istom smislu, uvjet (B) još ćemo preinačiti:

(C) $$(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 169 = 25$$

Dalje dobivamo

(D) $$(2x^2 - 13)^2 = 25$$

(E) $$2x^2 - 13 = \pm 5$$

(F) $$x^2 = \frac{13 \pm 5}{2}$$

(G) $$x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}$$

(H) $$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2$$

Svaka redukcija koju smo izvršili bila je obratljiva. Prema tome, posljednji uvjet (H) ekvivalentan je prvom uvjetu (A) tako da su brojevi 3, —3, 2, —2 sva moguća rješenja naše prvobitne jednadžbe.

Malo prije smo iz prvobitnog uvjeta (A) izveli čitav niz uvjeta (B), (C), (D), . . ., od kojih je svaki bio ekvivalentan prethodnom uvjetu. Ova okolnost zavređuje najveću pažnju. Ekvivalentni uvjeti zadovoljeni su istim objektima. Prelazimo li dakle od zadanog uvjeta na nov, ekvivalentan uvjet, imamo ista rješenja. Međutim, ako prelazimo od zadanog uvjeta na neki uži, gubimo rješenja; ako prelazimo na širi, dopuštamo neumjesna, slučajna rješenja, koja nemaju ništa s postavljenim zadatkom. Ako pak u nizu uzastopnih redukcija prelazimo na uži uvjet, a kasnije ponovo na širi, možemo posve izgubiti trag prvobitnog zadatka. Da izbjegnemo toj opasnosti, moramo brižljivo kontrolirati svaki novouvedeni uvjet: Je li on ekvivalentan prvobitnom uvjetu? Ovo je pitanje još važnije ako se ne bavimo samo jednom jednadžbom, kao što je ovdje bio slučaj, već sistemom jednadžbi, ili ako uvjet nije izražen jednadžbama, npr. u geometrijskim konstruktivnim zadacima.

(Usporedi PAPUS, naročito bilješke 2, 3, 4, 8. Opis na str. 100, redak 2. odozdo do str. 101, redak 14. nepotrebno je ograničen na lanac »određenih zadataka«, od kojih svaki ima različitu nepoznanicu. Primjer što smo ga ovdje razmatrali specifičan je upravo u obratnom smislu; svi zadaci u lancu imaju istu nepoznanicu, a razlikuju se samo po obliku uvjeta. Dakako, nije potrebno ni takvo ograničenje.)

8. *Jednostrana redukcija.* Imamo dva zadatka, A i B, oba neriješena. Kad bismo umjeli riješiti A, mogli bismo odatle izvesti potpuno rješenje zadatka B. No obratno ne vrijedi: kad bismo umjeli riješiti B, možda bismo saznali nešto o zadatku A, ali ne bismo znali kako da iz rješenja zadatka B izvedemo potpuno rješenje zadatka A. U takvu smo slučaju rješenjem zadatka A postigli više nego rješenjem zadatka B. Mogli bismo kazati da je od ta dva zadatka zadatak A *širi*, a zadatak B *uži*.

Ako od postavljenog zadatka prelazimo bilo na širi, bilo na uži zadatak, takav korak nazivamo *jednostranom redukcijom*. Postoje dvije vrste jednostrane redukcije, i obje su, na ovaj ili onaj način, riskantnije od dvostrane ili konvertibilne redukcije.

U primjeru 2. imali smo jednostranu redukciju na uži zadatak. I zaista, kad bismo umjeli riješiti prvobitni zadatak o kvadru sa zadanim dimenzijama a, b, c, mogli bismo prijeći na pomoćni zadatak stavljajući $c = 0$ i tako dobiti pravokutnik duljine a i širine b. Daljnji primjer jednostrane redukcije na uži zadatak vidi u članku SPECIJALIZACIJA, 3, 4, 5. Ti primjeri pokazuju da možemo uži zadatak upotrijebiti kao neko *prelazno uporište*, odskočnu dasku, kombinirajući rješenje pomoćnog zadatka s nekim zgodnim dopunskim napomenama, i tako doći do rješenja prvobitnog zadatka.

Jednostrana redukcija na širi zadatak može također voditi uspjehu. (Vidi GENERALIZACIJA, 2. i prijetvorbu prvog zadatka u drugi u članku INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA, 1, 2.) Širi zadatak može biti pristupačniji; to je PARADOKS PRONALAZAČA.

Postavljanje jednadžbi slično je prevođenju s jednog jezika na drugi (OZNAKE, 1). Ova usporedba, koju je upotrijebio Newton u svojoj »*Arithmetica Universalis*«, mogla bi možda

pomoći u razjašnjavanju prirode izvjesnih teškoća, koje često osjećaju i učenici i nastavnici.

1. Postavljati jednadžbe znači uvjete, formulirane riječima, izraziti matematičkim simbolima; to je prevođenje s običnog jezika na jezik matematičkih formula. Teškoće koje imamo pri postavljanju jednadžbi teškoće su prevođenja.

Da prevedemo neku rečenicu s hrvatskosrpskog jezika na francuski, potrebno je dvoje. Prvo, moramo potpuno razumjeti hrvatskosrpsku rečenicu. Drugo, moramo dobro poznavati izražajne oblike svojstvene francuskom jeziku. Situacija je vrlo slična ako pokušamo jedan uvjet, iznijet riječima, izraziti matematičkim simbolima. Prvo, moramo potpuno razumjeti uvjet. Drugo, moramo dobro poznavati oblike matematičkog izražavanja.

Hrvatskosrpsku rečenicu relativno je lako prevesti na francuski jezik ako se to može doslovce. No, ima hrvatskosrpskih idioma koje ne možemo doslovno prevesti na francuski jezik. Sadrži li naša rečenica takve idiome, bit će prevođenje teže; morat ćemo obratiti manje pažnje pojedinim riječima, a više čitavom smislu. Prije nego rečenicu prevedemo, morat ćemo je možda preudesiti.

Mnogo je toga prilično jednako pri postavljanju jednadžbi. U lakšim se slučajevima tekst gotovo automatski cijepa na uzastopne dijelove, a svaki se od tih dijelova odmah može napisati matematičkim simbolima. U težim slučajevima uvjet se sastoji od dijelova, koje ne možemo neposredno prevesti u matematičke simbole. Ako je tako, manje ćemo pažnje obratiti doslovnom tekstu, a više ćemo se morati koncentrirati na misao. Prije nego započnemo ispisivanje formula, trebat ćemo možda preudesiti uvjet imajući pri tom na umu pomoćna sredstva matematičkog označavanja.

U svim slučajevima, i lakšim i težim, potrebno je razumjeti uvjet, *rastaviti razne dijelove uvjeta* te pitati: *Možeš li ih napisati?* U lakšim slučajevima uspjet će nam bez oklijevanja da razdijelimo uvjet na dijelove koji se mogu ispisati matematičkim simbolima; u težim slučajevima neće se tako jasno razabirati prikladno raščlanjivanje uvjeta.

Pošto proučimo naredne primjere, bit će korisno da ponovo pročitamo ovo što smo upravo izložili.

2. *Treba naći dva broja kojih je suma* 78, *a produkt* 1296.

Raspolovimo svoj papir vertikalnom crtom. Na jednoj ćemo strani pisati tekst raščlanjen na zgodne dijelove. Na drugoj ćemo strani pisati algebarske znakove, i to nasuprot pripadnim dijelovima teksta. Original je lijevo, prijevod u simbole desno.

Formuliranje zadatka

u hrvatskosrpskom jeziku	u algebarskom jeziku
Treba naći dva broja	x, y
kojih je suma 78,	$x + y = 78$
a produkt 1296.	$x\,y = 1296.$

U ovom se slučaju tekst, formuliran riječima, rastavlja gotovo automatski na uzastopne dijelove, od kojih se svaki dio može neposredno napisati matematičkim simbolima.

3. *Treba izračunati širinu i visinu kvadratne prizme ako joj je volumen* 63 cm^3, *a oplošje* 102 cm^2.

Što je nepoznato? Osnovni brid (nazovimo ga x) i visina prizme (nazovimo je y).

Što je zadano? Volumen 63 i oplošje 102.

Kako glasi uvjet? Kvadratna prizma kojoj je osnovni brid x, a visina y, treba da ima volumen 63, a oplošje 102.

Rastavi razne dijelove uvjeta! Uvjet ima dva dijela. Jedan se dio bavi volumenom, a drugi oplošjem.

Zacijelo nećemo oklijevati u podjeli čitavog uvjeta na takva dva dijela, ali ih nećemo moći »neposredno« napisati. Moramo znati kako se izračunavaju volumen i razni dijelovi oplošja. Uz dovoljno geometrijskih znanja ipak ćemo lako moći oba dijela uvjeta formulirati tako da prijevod u jednadžbe bude izvediv. Na lijevoj strani pisat ćemo bitno preudešenu i proširenu formulaciju svog zadatka, pogodnu za prevođenje u algebarski jezik.

Kvadratnoj prizmi treba naći osnovni brid	x
i visinu.	y
I. Zadan je volumen.	63
Baza, koja je kvadrat stranice x,	x^2
i visina	y
određuje volumen, koji je njihov produkt.	$x^2y = 63$
II. Zadano je oplošje.	102
Oplošje se sastoji od dva kvadrata sa stranicom x	$2\,x^2$
i od četiri pravokutnika, kojima su dimenzije x i y.	$4\,xy$
Zbrajanje daje oplošje.	$2\,x^2 + 4\,xy = 102.$

4. *Zadana je jednadžba nekog pravca i koordinate jedne tačke. Treba naći tačku koja je zadanoj tački simetrična s obzirom na zadani pravac.*

Ovo je zadatak iz analitičke geometrije ravnine.

Što je nepoznato? Tačka kojoj su koordinate, na primjer, p, q.

Što je zadano? Jednadžba nekog pravca, recimo $y = kx + l$, i jedna tačka, kojoj su koordinate, na primjer, a, b.

Kako glasi uvjet? Tačke (a, b) i (p, q) simetrično su raspoređene s obzirom na pravac $y = kx + l$.

Sada dolazimo do bitne teškoće, naime da rastavimo uvjet na dijelove koji se mogu izraziti jezikom analitičke geometrije. Narav te teškoće valja dobro razumjeti. Rastavljanje uvjeta na dijelove može biti logički besprijekorno, a ipak beskorisno. Ovdje nam je potreban rastav na takve dijelove koji će biti pogodni za analitičko izražavanje. Da bismo našli takav rastav, moramo se *vratiti na definiciju* simetrije, no imajući pri tom na umu pomoćna sredstva analitičke geometrije. Što znači simetrija s obzirom na pravac? Koje geometrijske odnose možemo jednostavno izraziti u analitičkoj geometriji? Koncentrirajmo se na prvo pitanje ne zaboravljajući pri tom drugo! Tako ćemo najzad doći do rastava, koji izgleda ovako:

Zadana tačka	(a, b)
i tražena tačka	(p, q)
u takvoj su vezi da je	
I. njihova spojnica okomita na zadanom pravcu,	$\dfrac{q-b}{p-a} = -\dfrac{1}{k}$
II. polovište te spojnice na zadanom pravcu.	$\dfrac{b+a}{2} = k\dfrac{a+p}{2} + l.$

Praktični zadaci razlikuju se u koječemu od čisto matematičkih zadataka, no glavni motivi i postupci rješavanja u biti su isti. Praktični inženjerski zadaci sadržavaju obično matematičke zadatke. Kazat ćemo nešto o razlikama, analogijama i vezama između tih dviju vrsta zadataka.

1. Jedan impresivan praktičan zadatak jest: konstrukcija brane na rijeci. Nisu nam potrebna nikakva specijalna znanja pa da taj zadatak shvatimo. Davno prije našeg vijeka naučnih teorija, gotovo u prethistorijsko doba, gradili su ljudi nasipe u dolini Nila i na drugim mjestima Zemlje gdje je žetva ovisila o navodnjavanju.

Zamislimo sada zadatak da se konstruira, sagradi važna moderna brana.

Što je nepoznato? U takvu zadatku ima mnogo nepoznanica: tačan smještaj nasipa, njegov geometrijski oblik i veličina, građevni materijal, itd.

Kako glasi uvjet? Na ovo pitanje ne možemo odgovoriti kratkom rečenicom jer uvjeta ima mnogo. Pri takvu zamašnu projektu treba udovoljiti mnogim važnim ekonomskim potrebama, a ostale potrebe povrijediti što je moguće manje. Brana treba da pribavlja električnu energiju, da daje vodu za natapanje ili za druge komunalne potrebe, a treba i da pomogne u obuzdavanju poplava. Međutim, brana treba da što manje ometa plovnost, što manje smeta ekonomski važnom ribogojstvu, što manje kvari lijepe pejzaže itd. I dakako: brana treba da bude što jeftinija, a valja je sagraditi što brže.

Što je zadano? Golemo je mnoštvo potrebnih podataka. Potrebni su nam topografski podaci o okolini rijeke i o njenim pritocima; geološki podaci koji su važni s obzirom na čvrstoću temelja, mogućnost probijanja i građevni materijal; meteorološki podaci o godišnjoj količini oborina i o visini vodostaja; ekonomski podaci o vrijednosti zemljišta koje će se poplaviti, o troškovima materijala i rada itd.

Naš primjer pokazuje da su nepoznanice, podaci i uvjeti u praktičnom zadatku definirani kompleksnije i manje oštro nego u matematičkom zadatku.

2. Da riješimo neki zadatak, treba nam izvjesna zaliha ranije stečenog znanja. Suvremeni inženjer ima na raspolaganju visoko specijalizirano mnoštvo znanja, naučnu teoriju o čvrstoći građevnih materijala, svoje vlastito iskustvo i masu inženjerskog iskustva, sačuvanog u specijalnoj tehničkoj literaturi. Mi ne možemo ovdje iznijeti kako se iskorištava takvo specijalno znanje, ali možemo pokušati da sebi predočimo što se događalo u svijesti starog egipatskog graditelja nasipa.

Razumije se da je on već vidio razne, možda manje nasipe, bilo zemljane bilo zidane, koji su zadržavali vodu. Vidio je bujicu koja je navaljivala, noseći drvlje, valjajući kamenje. Možda je već pomagao u obnavljanju nasipa nakon poplave. Bit će da je vidio kako se lomi nasip pod udarcima bujice. Zacijelo je čuo pričanja o nasipima koji su izdržali stoljećima, ili pak o takvima gdje su neočekivani prodori rijeke na površinu nasipa, kao i napetosti i deformacije u njegovoj unutrašnjosti. On je mogao sebi zamisliti pritisak njegovoj unutrašnjosti.

Međutim, egipatski graditelji nasipa nisu ipak imali nikakav precizan, kvantitativan, naučni pojam o tlaku tekućine i o napetostima i deformacijama u krutom tijelu. Takvi su pojmovi bitan sastavni dio intelektualne opreme suvremenog inženjera. No, i ovaj treba mnoga znanja, koja još nisu dostigla precizan naučni nivo. Ono što on zna o eroziji vode tekućice, o nanošenju mulja, o plastičnosti i drugim nedovoljno jasno definiranim svojstvima izvjesnih materijala — znanje je prilično empiričkog karaktera.

Naš primjer pokazuje da su potrebna predznanja i upotrijebljeni pojmovi u praktičnim zadacima definirani kompleksnije i manje oštro nego u matematičkim zadacima.

3. Nepoznanice, podaci, uvjeti, pojmovi, potrebno predznanje — sve je to u praktičnim zadacima kompleksnije i manje oštro nego u matematičkim zadacima. To je važna razlika, možda i glavna. Ona zacijelo sadrži u sebi i druge razlike. No čini se da su ipak osnovni motivi i postupci rješavanja za obje vrste zadataka isti.

Rasprostranjeno je mišljenje da za praktične zadatke treba više iskustva nego za matematičke. Može biti. No, vrlo je vjerojatno da je razlika u prirodi potrebnog znanja, a ne u našem stavu prema zadatku. Rješavajući neki zadatak bilo jedne bilo druge vrste, moramo se osloniti na svoje iskustvo sa sličnim zadacima te često pitati: *Jesi li isti zadatak vidio u nešto drugačijem obliku? Znaš li neki srodan zadatak?*

Rješavajući matematički zadatak, polazimo od vrlo jasnih pojmova, koji su u našoj svijesti prilično dobro sređeni. Rješavajući praktičan zadatak, često smo prisiljeni da pođemo od dosta mutnih ideja; razbistravanje pojmova može postati važan dio zadatka. Medicina, na primjer, može danas bolje kontrolirati zarazne bolesti nego što je mogla u vrijeme prije Pasteura [Paster], kad je sam pojam zaraze bio još dosta mutan. *Jesi li uzeo u obzir sve bitne pojmove koji se nalaze u zadatku?* Ovo je pitanje dobro za sve vrste zadataka, no njegova će se upotreba jako mijenjati, već prema prirodi pojmova koji se pojavljuju.

U savršeno formuliranom matematičkom zadatku bitno su važni svi podaci i sve klauzule uvjeta; sve ih valja uzeti u obzir. U praktičnim zadacima imamo obilje podataka i uvjeta. Uzimamo ih u obzir koliko možemo, no neke smo podatke i uvjete prisiljeni zanemariti. Uzmimo slučaj konstruktora velike brane. On uzima u obzir javni interes, razmatra važne ekonomske interese, ali je prinuđen da se ne obazire na

izvjesne sitne zahtjeve i zamjerke. Strogo uzevši, podaci njegova zadatka su neiscrpni. On bi, na primjer, rado nešto više saznao o geološkim osobinama tla na kome treba sagraditi temelj, ali će najzad morati da prestane sa sakupljanjem geoloških podataka, iako će nužno ostati nešto neizvjesnosti.

Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet? Ova pitanja ne možemo izostaviti kad se bavimo čisto matematičkim zadatkom. Međutim, pri praktičnim zadacima morat ćemo ova pitanja postavljati u nešto izmijenjenom obliku: Jesi li iskoristio sve podatke koji *mogu znatnije pridonijeti* rješenju? Jesi li iskoristio sve uvjete koji *mogu znatnije utjecati* na rješenje? Mi se koristimo mnogim važnim znanjima, po potrebi skupljamo i daljnje informacije, ali najzad moramo prestati, moramo negdje staviti tačku, nužno moramo nešto zanemariti. »Tko se boji vrabaca, nek ne sije proje«. Često imamo preobilje podataka koji nemaju nikakav znatniji utjecaj na konačan oblik rješenja.

4. Konstruktori starih egipatskih nasipa morali su se, interpretirajući svoja iskustva, oslanjati na zdrav razum; nisu imali na što drugo. Suvremeni inženjer ne može se oslanjati samo na zdrav razum, naročito ne onda ako je njegov projekt nov i smion. On treba da tačno proračuna otpor zasnovanog nasipa te da kvantitativno predvidi napetosti i deformacije u unutrašnjosti. U tu svrhu mora primijeniti teoriju elasticiteta (koja se sasvim dobro može primijeniti na betonske konstrukcije). Primjena te teorije zahtijeva dobar udio matematike; praktičan inženjerski zadatak vodi do matematičkog zadatka.

Taj je matematički zadatak previše tehničke prirode, a da bismo ga ovdje izlagali; sve što o tom možemo kazati svodi se na jednu opću napomenu. Postavljajući i rješavajući matematičke zadatke koji potječu od praktičnih zadataka, mi se obično zadovoljavamo *aproksimacijom*. Prinuđeni smo da zanemarujemo neke sporednije podatke i uvjete praktičnog zadatka. Stoga je opravdano da dopustimo poneku malu netačnost u proračunima, osobito ako dobivamo na jednostavnosti tamo gdje gubimo na tačnosti.

5. O aproksimacijama moglo bi se reći mnogo toga što bi bilo od općeg interesa. Međutim, ne možemo pretpostavljati specijalna matematička znanja, pa ćemo se stoga ograničiti samo na jedan zoran, poučan primjer.

Crtanje geografskih karata važna je praktična zadaća. Tu se često uzima da je Zemlja kugla. Međutim, to je samo aproksimativna pretpostavka, a ne prava istina. Površina Zemlje uopće nije matematički definirana ploha. Mi sigurno znamo da je Zemlja na polovima spljoštena. No, ako pretpostavimo da je Zemlja kugla, karta se dade mnogo lakše nacrtati. Time dobivamo mnogo na jednostavnosti, a ne gubimo bitno na tačnosti. Zamislimo veliku loptu koja ima tačan oblik Zemlje, a ekvatorski joj je promjer 25 m. Udaljenost između polova takve kugle manja je od 25 m jer je Zemlja spljoštena, ali je manja samo za približno 8 cm. Prema tome, kugla daje dobru praktičnu aproksimaciju.

Pravila otkrivanja. Prvo je pravilo otkrivanja: imati pameti i sreće. Drugo je pravilo otkrivanja: ustrajno sjediti i napeto čekati dok se ne pojavi dobra ideja.

Dobro je podsjetiti se (donekle surovo) da su izvjesne težnje beznadne. Nepogrešiva pravila otkrivanja, koja bi vodila k rješenju svih mogućih matematičkih zadataka, bila bi još poželjnija od kamena mudraca što su ga alkemičari uzalud tražili. Takva bi pravila činila čudesa, a čudesa nema. Naći nepogrešiva pravila koja bi se mogla primijeniti na sve vrste zadataka stari je filozofski san, no taj san nikad neće postati nešto više od sna.

Razborita heuristika ne može težiti za nepogrešivim pravilima, ali može nastojati da proučava one postupke (misaone operacije, poteze, korake) koji mogu tipično koristiti u rješavanju zadataka. To su postupci svakog normalnog čovjeka koji se dovoljno zanima za svoj zadatak. Na njih upućuju izvjesna stereotipna pitanja i preporuke što ih postavlja inteligentan čovjek sam sebi, a inteligentan nastavnik svojim učenicima. Zbirka takvih pitanja i preporuka, dovoljno općenito formuliranih i pomno sređenih, bit će možda manje privlačna od kamena mudraca, ali se može stvarno načiniti. U našoj tabeli imamo takvu zbirku.

Pravila poučavanja. Prvo je pravilo poučavanja: znati ono što valja poučavati. Drugo je pravilo poučavanja: znati nešto više od onog što valja poučavati.

Prvo dolazi najprije. Autor ove knjige ne misli da su sva pravila ophođenja za nastavnike potpuno beskorisna; inače se ne bi bio odvažio da napiše čitavu knjigu o vladanju nastavnika i učenika. Ali ne valja zaboraviti da nastavnik matematike treba da matematiku zaista poznaje, pa ako hoće svojim učenicima ucijepiti pravilno gledanje na zadatke morao je takvo gledanje sam steći.

Pravila stila. Prvo je pravilo stila: imati što da se kaže. Drugo je pravilo stila: svladati sama sebe ako slučajno valja kazati dvije stvari; najprije treba kazati jednu stvar, zatim drugu, a ne obje istodobno.

Preodređen. Vidi: UVJET.

Promotri nepoznanicu! To je stari savjet. Latinski se kaže: »Respice finem«. To znači, gledaj na svršetak! Misli na svoj cilj! Ne zaboravi svrhu! Misli na ono što želiš postići! Ne gubi s uma ono što se traži! Imaj na umu ono za što radiš! *Promotri nepoznanicu! Promotri tvrdnju!* Obje posljednje verzije fraze »respice finem« specifično su prilagođene matematičkim zadacima, »odredbenim« odnosno »dokaznim«.

Koncentriramo li svoju pažnju i volju na cilj, mi razmišljamo o sredstvima i putovima kojima se postiže taj cilj. Koja su to sredstva? Kako bi mogao postići svoj cilj? Kako ćeš dobiti takav rezultat? Koji uzroci mogu izazvati takav rezultat? Gdje si već vidio takav rezultat? Što se obično radi da bi se dobio takav rezultat? *I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog teorema koji sadrži istu ili sličnu tvrdnju!* Opet su dvije posljednje verzije specifično prilagođene »odredbenim« i »dokaznim« zadacima.

1. Razmotrit ćemo sad matematičke »odredbene zadatke« i pripadnu preporuku: *Nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu nepoznanicu!* Usporedit ćemo ovu preporuku s onom koja je sadržana u pitanju: *Znaš li neki srodan zadatak?*

Druga je preporuka općenitija od prve. Ako je neki zadatak srodan drugome, oba zadatka imaju nešto zajedničko. Oni mogu sadržavati neke zajedničke objekte i pojmove, ili imati zajedničke neke zadane podatke, ili neki dio uvjeta itd. Naša pak prva preporuka inzistira na jednom specijalnom zajedničkom svojstvu: dva zadatka treba da imaju istu nepoznanicu. To znači da u oba slučaja nepoznanica treba da je objekt iste kategorije, npr. u oba slučaja duljina dužine.

U usporedbi s općenitom preporukom, specijalna je preporuka u izvjesnom smislu ekonomična.

Prvo, možemo uštedjeti nešto truda pri opisu zadatka. Ne moramo razmatrati odjednom čitav zadatak, već samo nepoznanicu. Zadatak se pojavljuje u shemi:

»Zadano je . . .; treba naći duljinu dužine.«

Drugo, izvjesnu ekonomiju imamo u izboru. Mnogi zadaci mogu biti srodni danom zadatku, imati s njim zajedničko ovo ili ono svojstvo. Međutim, uočavajući nepoznanicu, sužujemo izbor, razmatramo samo takve zadatke koji imaju istu nepoznanicu. A među zadacima koji imaju istu nepoznanicu svakako ćemo najprije razmatrati one koji su najelementarniji i najpoznatiji.

2. Naš zadatak ima oblik:

»Zadano je . . .; treba naći duljinu dužine.«

Najjednostavniji i najpoznatiji zadaci te vrste bave se trokutima: Zadana su tri odredbena elementa trokuta; treba naći duljinu stranice. Sjetivši se toga, došli smo do nečeg što bi moglo biti važno: *Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti? Možeš li primijeniti njegov rezultat?* Da bismo primijenili poznate rezultate o trokutima, moramo na svojoj slici imati trokut. Imamo li tu trokut? Ili ga tek moramo uvesti, pa da možemo iskoristiti te poznate rezultate? *Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj zadatak?*

Ima više jednostavnih zadataka u kojima je nepoznata stranica trokuta. (Oni se među sobom razlikuju u zadanim elementima; mogu biti zadana dva kuta i stranica, ili dvije stranice i kut, a položaj kuta prema stranicama može biti različit. Svi su ti zadaci osobito jednostavni kod pravokutnog

trokuta.) Koncentrirajući se na svoj zadatak, nastojat ćemo pronaći koju vrstu trokuta moramo uvesti, koji je ranije riješeni zadatak (s istom nepoznanicom kao i naš sadašnji zadatak) najpogodniji za našu sadašnju svrhu.

Kad uvedemo zgodan pomoćni trokut, može se desiti da mu još ne znamo tri odredbena elementa. No, to i nije apsolutno nužno; ako predviđamo da dijelove kojih još nema možemo nekako dobiti, bitno smo napredovali, imamo plan rješavanja.

3. Postupak što smo ga malo prije (pod 1. i 2) skicirali, ilustriran je u bitnim crtama u § **10**. (Ilustraciju donekle zasjenjuje sporost učenika.) Nipošto ne bi bilo teško navesti mnoge slične primjere. Zaista, rješavanje gotovo svih »odredbenih zadataka« — kako ih obično postavljamo u razredima koji nisu previše poodmakli — možemo započeti tako da na zgodan način upotrijebimo preporuku: *I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!*

Potrebno je takve zadatke shematizirati obazirući se prvenstveno na nepoznanicu:

(1) Zadano je . . .; treba naći duljinu dužine.
(2) Zadano je . . .; treba naći kut.
(3) Zadano je . . .; treba naći volumen tetraedra.
(4) Zadano je . . .; treba konstruirati tačku.

Imamo li nešto iskustva u obradi elementarnih matematičkih zadataka, lako ćemo se odmah sjetiti nekih jednostavnih i poznatih zadataka s istom nepoznanicom. Ako dani zadatak nije jedan od tih jednostavnih, poznatih zadataka, dakako da ćemo nastojati upotrijebiti ono što nam je poznato i okoristiti se rezultatima tih jednostavnih zadataka. Pokušat ćemo uvesti u zadatak nešto korisno, dobro poznato, i tako doći do valjana početka.

U svakom od četiri spomenuta slučaja nalazi se jasan plan, plauzibilna slutnja o budućem toku rješavanja.

(1) Nepoznanicu treba da dobijemo kao stranicu nekog trokuta. Preostaje da se uvede prikladan trokut kome su odredbeni elementi poznati ili ih lako dobivamo.

(2) Nepoznanicu treba da dobijemo kao kut u nekom trokutu. Preostaje da se uvede prikladan trokut.

(3) Nepoznanicu možemo dobiti ako je poznata površina baze i duljina visine. Preostaje da se nađe površina jedne plohe i pripadna visina.

(4) Nepoznanicu treba da dobijemo kao sjecište dvaju geometrijskih mjesta, od kojih je svako ili pravac ili kružnica. Preostaje da se takva geometrijska mjesta izvuku iz postavljena uvjeta.

U svim tim slučajevima plan je pobuđen jednostavnim zadatkom s istom nepoznanicom i željom da se iskoristi bilo rezultat, bilo metoda tog zadatka. Dakako, u provođenju plana možemo zapasti u teškoće, no imamo neku početnu ideju, a to je velika prednost.

4. Takva prednost ne postoji ako nema zadatka koji je ranije riješen, a ima istu nepoznanicu. U takvim je slučajevima znatno teže zahvatiti postavljeni zadatak.

»Treba naći oplošje kugle zadana polumjera.« Taj je zadatak riješio Arhimed. Jedva da postoji jednostavniji problem s istom nepoznanicom, a sigurno nije bilo takvog jednostavnijeg problema koji bi bio mogao upotrijebiti Arhimed. Arhimedovo rješenje možemo u stvari smatrati jednim od najznačajnijih matematičkih postignuća.

»Treba naći oplošje kugle, upisane tetraedru, kome je zadano svih šest bridova.« Znamo li Arhimedov rezultat, nije potrebno, da bismo riješili ovaj zadatak, imati i Arhimedovu genijalnost; treba samo polumjer upisane kugle izraziti pomoću šest bridova tetraedra. To nije posve lako, ali se teškoća nikako ne može usporediti s teškoćom Arhimedova zadatka.

Znati ili ne znati ranije riješen zadatak s istom nepoznanicom — u tome može biti sva razlika između lakog i teškog zadatka.

5. Kao što smo upravo spomenuli, Arhimed, tražeći kuglino oplošje, nije znao ni za kakav već riješeni zadatak s istom nepoznanicom. Međutim, znao je za razne, ranije riješene zadatke sa sličnom nepoznanicom. Ima zakrivljenih ploha kojima se površina lakše dobiva nego površina kugline plohe. U Arhimedovo vrijeme bili su poznati plaštevi uspravnih kružnih valjaka, plaštevi uspravnih kružnih stožaca i plaštevi uspravnih kružnih krnjih stožaca. Možemo biti sigurni da je

Arhimed brižljivo razmatrao ove jednostavnije slične slučajeve. I doista, on u svom rješenju upotrebljava kao aproksimaciju kugle jedno složeno tijelo, sastavljeno od dva stošca i više krnjih stožaca (vidi članak DEFINICIJA, 6).

Ako ne možemo da nađemo neki riješeni zadatak s istom nepoznanicom, pokušat ćemo naći zadatak sa sličnom nepoznanicom. Takvi zadaci nisu tako blisko srodni našem zadatku kao oni prvi, pa su stoga za našu svrhu općenito manje upotrebljivi, ali ipak mogu biti vrijedni vodiči.

6. Dat ćemo još neke napomene koje se odnose na »dokazne zadatke«. One su analogne prethodnim opširnijim razlaganjima za »odredbene zadatke«.

Moramo dokazati (ili opovrgnuti) neki jasno formulirani teorem. Ma koji teorem koji je već dokazan, a na neki je način srodan postavljenom teoremu, ima izgleda da nam može koristiti. No, najneposredniju korist možemo očekivati od onih teorema koji imaju istu tvrdnju kao i postavljeni teorem. Znamo li to, *promotrimo tvrdnju*, tj. razmatrajmo svoj teorem s naročitim obzirom na njegovu tvrdnju! Takav svoj način razmatranja možemo izraziti shemom:

»Ako . . ., kutovi su jednaki.«

Koncentrirajmo pažnju na svoju tvrdnju *i nastojmo sjetiti se nekog poznatog teorema koji sadrži istu ili sličnu tvrdnju!* Napose treba nastojati da se sjetimo nekog vrlo jednostavnog takvog teorema.

U našem slučaju ima raznih takvih teorema, i mi se možemo sjetiti slijedećeg: »Ako su dva trokuta sukladna, homologni su im kutovi jednaki.« *Evo teorema koji je srodan tvom, a već je dokazan! Možeš li ga upotrijebiti? Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj teorem?*

Povodimo li se za ovim preporukama i nastojimo li da pravilno procijenimo pomoć koju nam pruža novi teorem, dolazimo do plana: jednakst dotičnih kutova dokazati pomoću sukladnosti trokuta. Razabiremo da treba uvesti dva trokuta koji imaju dotične kutove, pa zatim dokazati njihovu sukladnost. Za početak rada takav je plan sigurno dobar i on može najzad, kao u § **19**, dovesti do željenog cilja.

7. Rezimirat ćemo. Sjetimo li se ranije riješenih zadataka s istom ili sličnom nepoznanicom (ranije dokazanih teorema s istom ili sličnom tvrdnjom), dobri su nam izgledi za pravilno usmjeravanje rada, pa možemo postaviti plan rješavanja. U jednostavnim slučajevima, kako to najčešće biva u razredima koji nisu previše poodmakli, obično su dovoljni najelementarniji zadaci s istom nepoznanicom (teoremi s istom tvrdnjom). Pokušaj dozivanja zadatka s istom nepoznanicom posve je razumljiv domišljaj zdrava razuma (usporedi s onim što je u tom pogledu rečeno u § 4). Upravo iznenađuje da takav jednostavan i koristan domišljaj nije općenitije poznat; autor je sklon mišljenju da dosad još nije bio postavljen u punoj općenitosti. Bilo kako bilo ni učenici ni nastavnici matematike ne mogu sebi dopustiti da ignoriraju preporuku: *Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!*

Provjeravanje razmatranjem dimenzija dobro je poznato, brzo i uspješno sredstvo za kontrolu geometrijskih i fizikalnih formula.

1. Da se podsjetimo kako se postupa pri takvu provjeravanju, razmotrimo uspravan kružni krnji stožac. Neka su:

R, r polumjeri baza,
v visina krnjeg stošca,
P površina plašta.

Ako je zadano R, r, v, tada je P očito određeno. Dobivamo izraz

$$P = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + v^2},$$

koji želimo provjeriti razmatranjem dimenzija.

Dimenziju geometrijske veličine lako je razabrati. R, r, v su duljine; ako smo (na primjer) mjerili centimetrima, njihova dimenzija je cm. Dimenzija površine P je cm^2. $\pi = 3{,}14159\ldots$ je neminovan, čist broj; želimo li apstraktnoj numeričkoj veličini pripisati dimenziju, valja staviti $cm^0 = 1$.

Svaki član sume mora imati istu dimenziju, koja je ujedno dimenzija čitave sume. R, r i $R + r$ imaju istu dimenziju, naime cm. Izrazi $(R - r)^2$ i v^2 imaju (kao što i mora biti) istu dimenziju, i to cm^2.

Dimenzija produkta jednaka je produktu dimenzija pojedinih faktora, a slično pravilo vrijedi i za potencije. Zamijenimo li na objema stranama veličine s njihovim dimenzijama, dobivamo

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}$$

Budući da je ovo očito valjano, provjeravanje nije moglo u formuli otkriti nikakvu pogrešku. Formula je izdržala kušnju.

Daljnji primjeri u § 14. i u članku MOŽEŠ LI KONTROLIRATI REZULTAT?, 2.

2. Provjeravanje razmatranjem dimenzija možemo primijeniti na konačan rezultat, ali i na međurezultate, na vlastiti rad i na rad drugih. (Ono je npr. vrlo zgodno pri pronalaženju pogrešaka u pismenim zadaćama.) Osim toga, moguća je primjena na formule kojih se prisjećamo i na formule koje naslućujemo.

Ako se, recimo, prisjećamo da su formule za oplošje i volumen kugle $4\pi r^2$ i $4\pi r^3/3$, samo nismo posve sigurni koja je formula za oplošje, a koja za volumen, dimenzionalno provjeravanje lako će ukloniti sumnju.

3. Provjeravanje razmatranjem dimenzija u fizici još je važnije nego u geometriji.

Razmatrajmo »jednostavno« njihalo, tj. malo, teško tijelo, obješeno na žici, gdje duljinu te žice smatramo nepromjenljivom, a težinu žice smijemo zanemariti. Oznake: l duljina žice, g akceleracija sile teže, T period njihala.

Mehanička razmatranja pokazuju da T ovisi samo o l i g. No kako ovisi? Možemo se sjetiti ili naslutiti da je

$$T = c\, l^m g^n$$

gdje su c, m, n izvjesne numeričke konstante. To znači, uzimamo da je T proporcionalno izvjesnim potencijama l^m, g^n od l i g.

Razmatramo dimenzije. Budući da je T vrijeme, mjerimo ga sekundama, dimenzija je s. Dimenzija duljine l je cm, dimenzija akceleracije g je $cm\ s^{-2}$, a dimenzija numeričke konstante c jest 1. Dimenzionalni pokus daje jednadžbu

$$s = 1 \cdot (cm)^m \cdot (cm\ s^{-2})^n$$

ili

$$s = (cm)^{m+n}\ s^{-2n}$$

No, na objema stranama moramo imati iste potencije osnovnih jedinica cm i s, pa tako dobivamo

$$0 = m + n \qquad 1 = -2n$$

a odatle

$$n = -\frac{1}{2} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Formula za period T mora dakle biti oblika

$$T = c\, l^{1/2} g^{-1/2} = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dimenzionalno razmatranje daje u ovom slučaju mnogo, ali ne može dati sve. Prvo, ne obavještava nas o vrijednosti konstante c (koja je jednaka 2π). Drugo, ne daje nikakva obavještenja o granicama valjanosti; formula vrijedi samo za male amplitude njihala i samo aproksimativno (tačno vrijedi za »beskonačno male« njihaje). Usprkos ovim ograničenjima, nema sumnje da smo dimenzionalnim razmatranjem mogli brzo i vrlo elementarno predvidjeti bitni dio jednog rezultata, za čiju su iscrpnu obradu potrebna mnoga viša sredstva. A tako je i u mnogim sličnim slučajevima.

Provodiš li svoj plan... Smisliti plan i provesti ga — dvije su stvari. To vrijedi u izvjesnom smislu i za matematičke zadatke; i tu postoje razlike u karakteru rada.

1. Dok sastavljamo konačan, strog dokaz, možemo upotrebljavati razloge koji su tek privremeni i plauzibilni, slično kao što upotrebljavamo skele da bismo poduprli most za vrijeme gradnje. Međutim, kad u radu dovoljno odmaknemo, uklanjamo skele i most treba da stoji sam. Isto tako, kad dovoljno odmaknemo u rješavanju zadatka, brišemo svakojake privremene i plauzibilne razloge. Rezultat treba da se tada oslanja jedino na strog dokaz.

Dok stvaramo plan rješavanja, ne moramo se odviše bojati posve plauzibilnih, heurističkih rasuđivanja. Sve je pravilno što vodi k pravilnoj ideji. No, kad započnemo plan provoditi, treba mijenjati stav. Tada valja prihvaćati samo uvjerljivije, stroge razloge. *Provodiš li svoj plan rješavanja, kontroliraj svaki korak! Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan?*

Što savjesnije kontroliramo svoje korake u izvršavanju plana, to slobodnije možemo upotrebljavati heuristička rasuđivanja u njegovu stvaranju.

2. Valja pripaziti na redoslijed kojim razrađujemo pojedinosti svog plana, osobito ako je naš zadatak kompliciran. Ne smijemo izostaviti nijedan detalj, moramo shvatiti odnos dotičnog detalja prema čitavom zadatku, paziti da ne izgubimo vezu između glavnih koraka. Zato je potrebno da napredujemo nekim zgodnim redom.

Specijalno: nije pametno ako kontroliramo manje važne detalje prije nego možemo opravdano smatrati da su glavni koraci dokaza besprijekorni. Postoji li »rupa« u glavnoj liniji dokaza, kontrola ovog ili onog sporednijeg detalja bit će svakako beskorisna.

Redoslijed kojim razrađujemo pojedinosti dokaza može se znatno razlikovati od redoslijeda kojim smo te pojedinosti smislili, a redoslijed kojim u konačnom prikazu ispisujemo te pojedinosti može biti opet različit. Euklidovi »Elementi« izlažu pojedinosti dokaza krutim sistematskim redom, koji su često oponašali i često kritizirali.

3. U Euklidovu prikazu svi su dokazi jednako usmjereni: u »odredbenim zadacima« od zadanog k nepoznatom, a u »dokaznim zadacima« od pretpostavke k tvrdnji. Svaki novi element, tačka, pravac, itd., mora biti korektno izveden iz zadanih elemenata ili iz elemenata koji su korektno bili izvedeni prethodnim koracima. Svako novo tvrđenje mora se korektno dokazati iz pretpostavke ili iz onih tvrđenja koja su korektno bila dokazana prethodnim koracima. Svaki novi element i svako novo tvrđenje ispituje se čim se prvi put pojavi pa se tako ispituje tačno jedanput. Svu svoju pažnju možemo koncentrirati na sadašnji korak, ne moramo gledati

ni unaprijed, ni unazad. Posljednji nov element čiji izvod moramo kontrolirati jest nepoznanica. Posljednje tvrđenje kome dokaz moramo provjeriti jest zaključna tvrdnja teorema. Ako je ispravan svaki korak, pa i posljednji, ispravan je i čitav dokaz.

Euklidski način izlaganja možemo bez rezerve toplo preporučiti ako postoji namjera da se dokaz provjeri u pojedinostima. Osobito ako je to naš vlastiti dokaz, koji je dug i kompliciran, a mi smo gá ne samo sami našli, već ga u grubim crtama i pregledali, pa sada jedino još treba da ispitamo posebice svako pojedino mjesto. U tom će slučaju biti najbolje ako se čitav dokaz ispiše euklidskim načinom.

Međutim, ne možemo bez rezerve preporučiti euklidski način izlaganja onda kad postoji namjera da se čitaocu ili slušaocu saopći dokaz o kojem nikad prije nije ništa čuo. Euklidskim načinom može se odlično prikazati svako posebno mjesto, ali taj način nije tako zgodan za prikaz glavne linije dokaza. INTELIGENTAN ČITALAC lako će uvidjeti da je svaki korak korektan, ali će mnogo teže sagledati izvor, svrhu i suvislost čitava dokaza. Uzrok teškoće je taj što euklidski prikaz vrlo često teče redoslijedom koji je upravo suprotan prirodnom redoslijedu pronalaženja. (Euklidov redoslijed je kruto »sintetički«; vidi PAPUS, naročito bilješke 3, 4, 5.)

4. Rekapitulirajmo. Euklidov stil izlaganja, gdje se neumoljivo ide od zadanih podataka do nepoznanice, od pretpostavke do tvrdnje, savršeno služi za kontrolu dokaza u njegovim pojedinostima, ali je vrlo daleko od savršenog ako se želi objasniti glavna linija nekog dokaza.

Vrlo je poželjno da učenici provjeravaju svoje vlastite dokaze euklidskim stilom, idući od zadanih podataka do nepoznanice, kontrolirajući svaki korak, samo u tom ne treba kruto pretjeravati. Nije toliko poželjno da nastavnik iznosi veliki broj dokaza čistim euklidskim stilom, iako euklidski prikaz može biti vrlo koristan nakon diskusije, u kojoj bi nastavnik (onako kako se to u ovoj knjizi preporučuje) dovodio učenike do toga da što samostalnije otkrivaju glavnu ideju rješenja. Poželjan izgleda i stil koji su prihvatili neki

udžbenici gdje se izlaže najprije intuitivna skica glavne ideje, a zatim pojedinosti euklidskim redoslijedom.

5. Ako se savjestan matematičar želi uvjeriti o ispravnosti nekog stavka, nastojat će da ga intuitivno shvati, a zatim da ga fomalno dokaže. *Možeš li jasno vidjeti da je ispravan? Možeš li dokazati da je ispravan?* Savjestan matematičar postupa tu poput žene koja savjesno kupuje. Ako se ona želi uvjeriti o kvaliteti nekog sukna, zahtijevat će i da ga vidi i da ga opipa. Intuitivno uviđanje i formalan dokaz dva su različita načina da se spozna istina, slično kao što materijalne predmete zamjećujemo preko dva razna osjetila, vida i opipa.

Intuitivno uvidjeti možemo davno prije formalnog dokaza. Svaki inteligentan učenik može, bez nekog sistematskog znanja stereometrije, čim jasno shvati tekst, uvidjeti da su dva pravca, paralelna s trećim pravcem, i međusobno paralelna. (Tri pravca mogu ležati u istoj ravnini, no mogu i ne ležati.) Međutim, za dokaz toga stavka, kako je on dan u 9. propoziciji XI knjige Euklidovih »Elemenata«, potrebna je duga, brižljiva i domišljata priprema.

Formalno baratati logičkim pravilima i algebarskim formulama možemo davno prije intuicije. Gotovo će svatko odmah uvidjeti da 3 nasumce uzeta pravca dijele ravninu na 7 dijelova (uoči jedini konačni dio: trokut, zahvaćen tim pravcima.) No, jedva će tko moći vidjeti, čak ako i do krajnosti napregne pažnju, da 5 nasumce uzetih ravnina dijele prostor na 26 dijelova. A može se strogo dokazati da je pravi broj upravo 26, a sam dokaz nije dapače ni dug, ni težak.

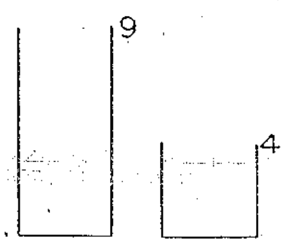
Provodimo li svoj plan, kontroliramo svaki korak. Pri tom se oslanjamo kako na intuitivno uviđanje, tako i na formalna pravila. Katkad je prvo intuicija, a katkad formalno rasuđivanje. Interesantna je i korisna vježba: raditi na oba načina. *Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan?* Jest, ja to mogu jasno i određeno. Intuicija je prva; no može li je formalno rasuđivanje dostići? *Možeš li i* DOKAZATI *da je ispravan?*

Pokušati da se formalno dokaže ono što se intuitivno uvidjelo, a intuitivno uvidjeti ono što se formalno dokazalo — umna je vježba koja okrepljuje. Na žalost, u školi nemamo za to uvijek dovoljno vremena. Primjer raspravljen u §§ **12.** i **14.** u tom je pogledu tipičan.

Raditi natraške. Želimo li shvatiti čovjekovo ponašanje, valja ga usporediti s ponašanjem životinja. I životinje »imaju zadatke« i »rješavaju zadatke«. Eksperimentalna je psihologija tokom posljednjih decenija bitno napredovala u istraživanju »rješavalačkih« aktivnosti raznih životinja. Mi ne možemo ovdje diskutirati o tim istraživanjima, nego ćemo samo (kasnije) skicirati jedan jednostavan i poučan eksperiment, a naš će opis poslužiti kao neka vrsta komentara metodi analize ili metodi »rada natraške«. O ovoj se metodi inače u ovoj knjizi raspravlja na drugom mjestu, u članku o PAPUSU, kome moramo zahvaliti za jedan važan opis te metode.

1. Pokušat ćemo odgovoriti na lukavo pitanje: *Kako ćemo iz rijeke izvaditi tačno 6 l vode ako imamo samo dvije posude za mjerenje: jedan kablić od 4 l i jedan od 9 l?*

Predočit ćemo sebi obje posude s kojima ćemo raditi. *(Što je zadano?)* Zamišljamo dvije cilindrične posude jednakih baza, kojima se visine odnose kao 9 : 4 (vidi sl. 19). *Kad bi*



Sl. 19.

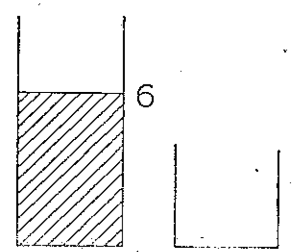
se na stijenci svake posude nalazila skala s horizontalnim, jednako razmaknutim crtama, pomoću kojih bismo mogli očitavati visinu razine vode, naš bi zadatak bio lak. No, takve skale nema, pa smo još daleko od rješenja.

Mi još ne znamo kako da odmjerimo tačno 6 litara; no možemo li odmjeriti što drugo? *(Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak! Možeš*

li iz zadanih podataka izvesti što korisno?) Poduzmimo nešto, poigrajmo se! Možemo napuniti veću posudu i preliti iz nje, koliko god se dade, u manju posudu. Dobivamo 5 litara. Možemo li dobiti 6 litara? Evo nam opet dva prazna kablića. Mogli bismo i...

Radimo sad onako kako većinom ljudi rade kad se suoče s ovom zagonetkom. Počinjemo s dvije prazne posude, kušamo ovo, kušamo ono, praznimo, punimo, i ako nam ništa ne uspijeva, započinjemo ponovo i kušamo nešto drugo. Mi *radimo unaprijed*, od dane početne situacije prema traženoj konačnoj situaciji, od zadanih podataka prema nepoznanici. Nakon mnogih pokušaja može se desiti da slučajno uspijemo.

2. Međutim, osobito vješti ljudi, ili pak oni koji su učeći matematiku naučili nešto više od pukih šablonskih postupaka, ne trate previše vremena takvim pokušajima, već okreću stvar i počinju raditi natraške.

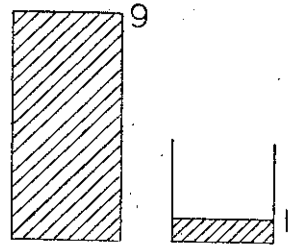


Sl. 20.

Što se traži od nas? *(Što je nepoznato?)* Predočimo sebi što jasnije konačnu situaciju kojoj težimo! Zamislimo da pred sobom imamo veću posudu s tačno 6 l vode i manju, praznu posudu, kao na sl. 20. *(Polazimo od traženog, a traženo uzimamo kao već nađeno* — kaže Papus.)

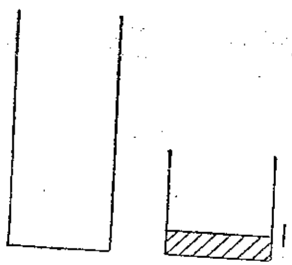
Od koje prethodne situacije možemo dobiti traženu konačnu situaciju kakvu pokazuje sl. 20? *(Istražujemo od čega bi prethodnog mogao potjecati traženi rezultat* — kaže Papus.) Mi bismo, dakako, mogli veću posudu napuniti sa svih 9 litara. No tada bi morala postojati mogućnost da iz nje odlijemo tačno 3 litre. Da bismo to mogli, ... morali bismo u manjoj posudi imati upravo 1 litru! Ideja je tu. Vidi sl. 21. (Korak što smo ga upravo učinili nipošto nije lak. Malo tko će ga učiniti bez prethodnog priličnog oklijevanja. Uviđajući značenje ovog koraka, mi u stvari nazrijevamo konture rješenja koje slijedi.)

No kako da dođemo do situacije koju smo upravo pronašli i ilustrirali slikom 21? *(Ispitujemo što bi prethodnom još dalje moglo prethoditi.)* Budući da je količina vode u rijeci za naše svrhe neograničena, situacija na sl. 21. izlazi na isto, kao i situacija prikazana na sl. 22,

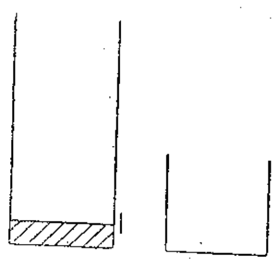


Sl. 21.

odnosno kao situacija na sl. 23.



Sl. 22.

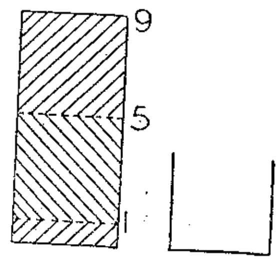


Sl. 23.

Lako je uvidjeti da se iz ma koje od situacija na sl. 21, 22, 23, koju smo jednom dobili, može izvesti svaka druga

takva situacija, ali nije tako lako nadoći na sl. 23. *ako je prije nismo vidjeli*, ako je slučajno nismo sreli pri nekom od onih naših početnih pokušaja. Igrajući se s dva kablića, mogli smo učiniti nešto slično, pa se sad u pravi čas podsjećamo da bi situacija na sl. 23 mogla nastati iz situacije na sl. 24: napunimo veću posudu i — dvaput uzastopce — odlijemo iz nje 4 litre u manju posudu, a iz manje posude izlijemo vodu u rijeku. *Naišli smo napokon na nešto što je već poznato* (to su Papusove riječi) i metodom analize, *radeći natraške*, otkrili pravilan redoslijed operacija.

Istina, otkrili smo pravilan redoslijed operacija u radu natraške; no sada još treba *proces obrnuti i poći od one tačke koja je u analizi bila posljednja* (kako kaže Papus). Najprije vršimo radnje koje su naznačene na sl. 24. i dobivamo sl. 23. Zatim prelazimo na sl. 22, pa na sl. 21. i najzad na sl. 20. *Vraćajući se istim putem, uspijeva nam napokon da izvedemo ono što se traži.*

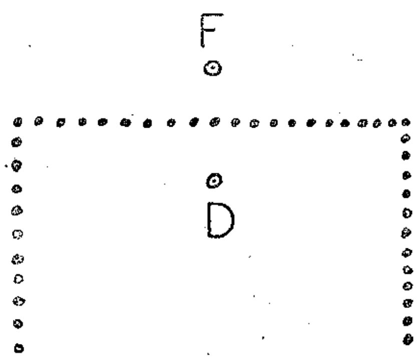


Sl. 24.

3. Prema grčkoj predaji metodu analize otkrio je Platon. Predaja možda nije najpouzdanija, ali u svakom slučaju, ako i nije Platon pronašao metodu, neki su učeni Grci smatrali da njeno otkriće treba pripisati jednom filozofskom geniju.

U ovoj metodi ima jedna dublja stvar. To je izvjesna psihološka teškoća pri okretanju, pri udaljavanju od cilja, pri radu natraške, gdje se ne ide izravno k željenom cilju. Otkrivajući slijed pravilnih operacija, naš razum mora raditi redom koji je upravo obrnut stvarnom vršenju operacija. Nastaje nekakav psihološki otpor protiv tog obrnutog reda, a taj otpor može i vrlo sposobnog učenika sprečavati u shvaćanju te metode ako mu se ona pažljivo ne prikaže.

A ipak, ne treba da budemo genijalni pa da neki konkretni zadatak riješimo radeći natraške; uz nešto zdrava razuma svatko će to učiniti. Koncentriramo se na željeni cilj i živo zamišljamo konačnu situaciju u kojoj bismo se htjeli nalaziti. Od koje prethodne situacije možemo do nje doći? Postaviti to pitanje — posve je prirodno. Pitajući tako, radimo natraške. I najjednostavniji zadaci mogu neusiljeno voditi do rada natraške; vidi PAPUS, 4.



Sl. 25.

Rad natraške postupak je zdrava razuma, nadohvat svakom, i gotovo je sigurno da su ga upotrebljavali matematičari i nematematičari i prije Platona. Ono što su neki učeni Grci smatrali dostignućem dostojnim genija jednog Platona jest: formulirati postupak općenito kao operaciju koja na tipičan način pomaže pri rješavanju matematičkih i nematematičkih zadataka.

4. A sad ćemo se obratiti psihološkom eksperimentu ako prijelaz od Platona na pse, kokoši i čimpanze nije prenagao. Uzmimo plot u obliku pravokutnika, s jednom otvorenom stranicom, kako to pokazuje sl. 25. Postavimo psa uz srednju

stranicu, u tačku D, a na drugu stranu, u tačku F, položimo nešto hrane. Zadatak je za psa prilično lak. Iz početka će se postavljati u takav položaj kao da će skočiti direktno na hranu, no tada će se naglo okrenuti, jurnuti oko kraja plota i bez oklijevanja dotrčati k svojoj hrani u glatkoj krivulji. No katkad, osobito ako su tačke D i F blizu, rješenje neće biti tako glatko; pas će izgubiti neko vrijeme u lajanju, grebenju i skakanju na plot prije nego mu (da se tako izrazimo) »sine sjajna ideja« da optrči plot.

Interesantno je uspoređivati ponašanje raznih životinja koje postavljamo namjesto psa. Zadatak je vrlo lak za čimpanzu ili za četvorogodišnje dijete (za koje će igračka biti privlačniji mamac od hrane). Međutim, zadatak ispada kao nešto vanredno teško za kokoš, koja će uzbuđeno trčati amo-tamo duž svoje strane plota i trebati dosta vremena da dođe do hrane, ukoliko do nje uopće dođe. Nakon mnogog trčkaranja možda će slučajno uspjeti.

5. Na jednom jedinom jednostavnom eksperimentu kakav je ovaj što smo ga ovdje samo skicirali ne smijemo graditi nikakvu veliku teoriju. No ipak, neće škoditi ako spomenemo neke očite analogije, uz uvjet da smo ih spremni kritički preispitati.

Obići zapreku — to je ono što nam valja činiti i kad rješavamo ma kakav zadatak; eksperiment ima neke vrste simboličku vrijednost. Kokoš je postupala kao što postupaju ljudi koji rješavaju svoj zadatak prtljajući, pokušavajući čas ovo, čas ono, pa napokon nekim slučajem uspiju, ali pri tom slabo uviđaju razloge svog uspjeha. Pas koji je grebao, skakao i lajao prije nego se okrenuo, rješavao je svoj zadatak otprilike jednako dobro kao i mi svoj zadatak s dva kablića. Zamišljanje skale koja je trebala da pokazuje nivo vode u posudama bilo je nekakvo, gotovo uzaludno grebenje, gdje smo mogli jedino opaziti da ono što tražimo leži dublje. I mi smo najprije pokušavali da radimo unaprijed, pa smo zatim došli na ideju da se okrenemo. Pas koji se nakon kratkog razmatranja situacije okrenuo i jurnuo daje — s punim pravom ili nepravom — utisak veće pronicavosti.

Ne, nećemo čak ni kokoš koriti zbog njene nespretnosti. Postoji izvjesna teškoća pri okretanju, pri udaljavanju od cilja, pri onakvu radu gdje ne vidimo stalno pred sobom cilj, gdje ne idemo izravno k željenom cilju. Postoji očita analogija između teškoća što ih ima kokoš i naših vlastitih teškoća.

Rastavi razne dijelove uvjeta! Prva nam je dužnost: shvatiti zadatak. Kad smo zadatak shvatili kao cjelinu, prelazimo na pojedinosti. Razmatramo glavne dijelove zadatka: nepoznanicu, zadane podatke i uvjet, svaki dio za se. Ako smo ove dijelove dobro zahvatili, a ne pada nam na um nikakva naročito korisna ideja, zaći ćemo još dalje u pojedinosti. Razmatramo razne podatke, svaki podatak za se. Ako smo uvjet shvatili kao cjelinu, *rastavljamo njegove razne dijelove* i razmatramo svaki dio za se.

Sad razabiremo ulogu preporuke o kojoj je ovdje riječ. Njezin je cilj da izazove korak koji je potreban da bismo zadatak vidjeli što jasnije i zalazili u sve finije pojedinosti. To je korak u RASTAVLJANJU I SASTAVLJANJU.

Rastavi razne dijelove uvjeta! Možeš li ih napisati? POSTAVLJANJE JEDNADŽBI često nam daje prilike da se tako pitamo.

Rastavljanje i sastavljanje važne su umne operacije.

Uzmimo da ispituješ neki objekt koji zaokuplja tvoj interes ili budi tvoju radoznalost: kuću koju bi htio uzeti u najam, ili neki važan šifrirani telegram, ili ma kakav predmet o čijoj svrsi i postanku razbijaš glavu, ili bilo koji problem koji bi htio riješiti. Ti imaš neki utisak o objektu kao cjelini, ali taj utisak možda nije još dovoljno određen. Zapazio si jedan detalj, i ti upravljaš svoju pažnju na nj. Zatim koncentriraš svoju pažnju na neki drugi detalj, pa zatim opet na neki drugi. Moguće su razne kombinacije detalja, i nakon nekog vremena promatraš objekt ponovo kao cjelinu, ali ćeš ga sada vidjeti sasvim drugačije. Rastavljaš cjelinu u njene dijelove pa zatim sastavljaš dijelove u cjelinu koja je više ili manje različita.

1. Zalaziš li u detalje, lako se možeš u njima izgubiti. Prevelik broj detalja ili odviše neznatni detalji opterećuju um.

Zbog njih možeš zanemariti glavni moment, a možeš ga uopće i ne vidjeti. Misli na čovjeka koji od stabala ne vidi šume!

Naravno da ne želimo tratiti svoje vrijeme nepotrebnim detaljima. Svoje sile moramo štedjeti za bitno. Teškoća je u tome što ne možemo unaprijed reći koji će se detalji na kraju pokazati kao potrebni, a koji ne.

Stoga treba da, prije svega, zadatak shvatimo kao cjelinu. Tada ćemo bolje moći prosuditi koji su posebni momenti najbitniji. Ispitamo li jedan ili dva bitna momenta, bolje ćemo moći prosuditi koje daljnje pojedinosti zavređuju, da ih pobliže istražimo. Zatim ćemo zaći u pojedinosti i postepeno rastavljati zadatak, ali ne dalje nego što je potrebno.

Dakako, nastavnik ne može očekivati da će svi učenici u tom smislu raditi pametno. Naprotiv, neki učenici imaju nerazboritu i lošu naviku da počinju raditi na detaljima prije nego su zadatak shvatili kao cjelinu.

2. Sad ćemo razmatrati matematičke zadatke, i to »određene zadatke«.

Pošto smo shvatili cjelinu zadatka, njegov cilj i težište, želimo zaći u pojedinosti. Gdje da počnemo? Gotovo u svim slučajevima pametno je započeti razmatranjem glavnih dijelova zadatka, a ti su: nepoznanica, zadani podaci i uvjet. Gotovo u svim slučajevima preporučljivo je da detaljno ispitivanje započnemo pitanjima: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet?*

Što da radimo ako hoćemo istražiti daljnje pojedinosti? Vrlo se često može preporučiti da ispitamo svaki zadani podatak za se, da *rastavimo razne dijelove uvjeta* i da istražujemo svaki dio za se.

Katkad ćemo naći potrebnim, osobito ako je zadatak teži, da zadatak još i dalje rastavimo i da istražujemo još sitnije detalje. Možda će dakle biti potrebno da se *vratimo na definiciju* izvjesnog izraza, da uvodimo nove elemente, sadržane u definiciji, i da ispitujemo tako uvedene elemente.

3. Pošto smo zadatak rastavili, pokušat ćemo da njegove elemente na neki nov način ponovo sastavimo. Specijalno bismo mogli elemente zadatka sastaviti u nov, pristupač-

niji zadatak, koji ćemo eventualno moći upotrijebiti kao pomoćni zadatak.

Dakako, postoje bezbrojne mogućnosti za sastavljanje. Kod teških zadataka bit će potrebne sakrivene, izvanredne, originalne kombinacije, i domišljatost rješavača sastojat će se upravo u originalnosti kombiniranja. No postoje, dakako, i izvjesne običnije i relativno jednostavne vrste spojeva, koje su dovoljne za jednostavne zadatke. Takve spojeve moramo temeljito poznavati i s njima valja najprije pokušati, i to čak i onda ako kasnije moramo pribjeći kompliciranijim sredstvima.

Ima jedna formalna klasifikacija, u kojoj su zgodno poredani najobičniji i najkorisniji spojevi. Da bismo iz danog zadatka konstruirali novi, možemo

(1) zadržati istu nepoznanicu, a mijenjati ostalo (podatke i uvjet), ili

(2) zadržati iste podatke, a mijenjati ostalo (nepoznanicu i uvjet), ili

(3) mijenjati i nepoznanicu i podatke.

[Slučajevi (1) i (2) djelomično se isprepliću. Moguće je u stvari i to da se zadrže i nepoznanica i podaci, a zadatak preinači tako da se samo oblik uvjeta promijeni. Na primjer, iduća dva zadatka, iako očito ekvivalentna, nisu posve jednaka:

Treba konstruirati jednakostraničan trokut ako je zadana stranica.

Treba konstruirati jednakokutan trokut ako je zadana stranica.

Razlika tih formulacija, koja je u ovom primjeru neznatna, može u drugim slučajevima biti znatna. Takvi su slučajevi u izvjesnom smislu važni, ali bi oduzelo previše prostora kad bismo se u to ovdje upuštali. Usporedi članak POMOĆNI ZADATAK, 7, posljednja primjedba.]

4. *Zadržati istu nepoznanicu,* a mijenjati podatke i uvjet, pa tako preinačiti zadatak — često je korisno. Preporuka: PROMOTRI NEPOZNANICU! smjera na zadatke s istom nepoznanicom. Možemo pokušati da se sjetimo na neki već riješeni zadatak te vrste: *I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!* Ako nam ne uspije sjetiti se takva zadatka, možemo pokušati da ga

smislimo: *Možeš li zamisliti druge neke zadane podatke koji bi bili pogodni za određivanje nepoznanice?*

Što je novi zadatak srodniji postavljenom, veći su mu izgledi da će biti upotrebljiv. Stoga ćemo nastojati, zadržavajući istu nepoznanicu, da zadržimo i neke podatke i dio uvjeta, a da što manje mijenjamo tek jedan ili dva podatka i manji dio uvjeta. Dobra metoda jest ta da se nešto izostavi, a ništa novo ne doda; uz istu nepoznanicu *zadržavamo samo jedan dio uvjeta, a odbacujemo drugi dio,* i pri tom ne uvodimo nikakvo novo ograničenje niti kakve nove zadane elemente. Primjeri i objašnjenja za ovaj slučaj dolaze pod 7. i 8.

5. *Zadržavajući iste podatke,* nastojimo uvesti neku korisnu, pristupačniju novu nepoznanicu. Takvu nepoznanicu valja dobiti iz originalnih podataka, i mi na takvu nepoznanicu mislimo kad pitamo: MOŽEŠ LI IZ ZADANIH PODATAKA IZVESTI ŠTO KORISNO?

Valja istaknuti da su tu poželjne dvije stvari. Prvo, nova nepoznanica treba da bude pristupačnija, tj. treba da se iz zadanih podataka dobije lakše nego prvobitna nepoznanica. Drugo, nova nepoznanica treba da bude korisna, tj. pošto je nađemo, ona treba pri traženju prvobitne nepoznanice poslužiti na neki određeni način. Ukratko, nova nepoznanica treba da bude neke vrste *prelazno uporište,* kao kamen u potoku. Kamen usred potoka bliži mi je nego druga obala na koju bih htio stići. Dođem li do kamena, on mi pomaže da stignem na drugu obalu.

Nova nepoznanica treba da bude i pristupačna i korisna, ali ćemo se u praksi često morati zadovoljiti s manjim. Ako nam se ne pruža ništa bolje, nije nerazumno da iz podataka izvedemo nešto što ima izvjesnih izgleda da bude korisno. A razumno je i da pokušamo s novom nepoznanicom, koja je usko povezana s prvobitnom nepoznanicom, čak ako se u početku i ne čini osobito pristupačnom.

Ako se, na primjer, naš zadatak sastoji u tome da nađemo dijagonalu kvadra (§ 8), možemo kao novu nepoznanicu uvesti dijagonalu jedne međašnje plohe. Tako možemo postupiti ili zato što *znamo* da ćemo, kad nađemo dijagonalu međašnje plohe, moći dobiti i prostornu dijagonalu tijela (kao u§ 10), ili pak zato što vidimo da se dijagonala međašnje plohe može lako dobiti, pa *naslućujemo* da bi ona mogla biti korisna pri traženju prostorne dijagonale. (Usporedi: DA LI SI ISKORISTIO SVE ZADANO?, 1.)

Ako se naš zadatak sastoji u tome da konstruiramo izvjesnu kružnicu, moramo odrediti dvoje: središte i polumjer. Možemo kazati da naš zadatak ima dva dijela. U nekim je slučajevima jedan dio pristupačniji od drugog, pa neće biti nerazborito ako u svakom slučaju uzmemo u obzir takvu mogućnost. *Možeš li riješiti dio zadatka?* Kada to pitamo, procjenjujemo izglede: isplati li se više koncentrirati pažnju na središte ili na polumjer, što ćemo od toga dvoga odabrati za našu novu nepoznanicu? Takva pitanja često koriste. U kasnijim složenijim zadacima često se odlučujuća ideja sastoji u tome da se izvuče neki pristupačniji (ali bitan) dio zadatka.

6. *Mijenjajući i nepoznanicu i podatke*, skrećemo od svog prvobitnog kursa više nego u prethodnim slučajevima. Naravno, to nam se ne sviđa; osjećamo opasnost da bismo lako mogli posve izgubiti prvobitan zadatak. Međutim, ipak je moguće da budemo prisiljeni na takvu dalekosežnu promjenu ako manje radikalnim promjenama nismo uspjeli da dobijemo nešto pristupačno i korisno. U napast da se toliko udaljimo od prvobitnog zadatka dolazimo ako novi zadatak ima povoljnih izgleda za uspjeh. *Možeš li promijeniti nepoznanicu, ili zadane podatke, ili — ako treba — oboje tako da nova nepoznanica i novi zadaci budu međusobno bliži?*

Interesantna mogućnost za mijenjanje i nepoznanice i podataka sastoji se u tome da se nepoznanica i jedan podatak međusobno zamijene. (Vidi: MOŽEŠ LI REZULTAT UPOTRIJEBITI?, 3.)

7. *Primjer.* Treba konstruirati trokut ako mu je zadana stranica a, visina v (okomita na a) i kut α (nasuprot stranici a).

Što je nepoznato? Trokut.

Što je zadano? Dvije dužine: a, v i jedan kut: α.

Znamo li nešto o geometrijskim konstruktivnim zadacima, nastojat ćemo takav zadatak svesti na konstrukciju tačke. Nacrtamo dužinu $\overline{BC}$ jednaku zadanoj stranici a. Tada se

sve svodi na određivanje vrha A, koji leži nasuprot stranici a; vidi sl. 26. U stvari imamo nov zadatak.

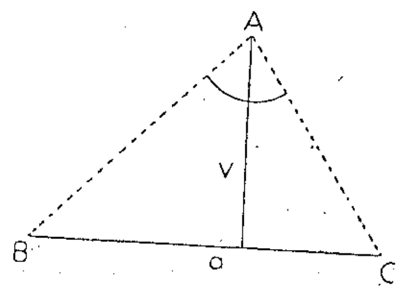
Što je nepoznato? Tačka A.

Što je zadano? Dužina v, kut α i dvije tačke B, C, kojima je zadan položaj.

Kako glasi uvjet? Udaljenost tačke A od dužine $\overline{BC}$ treba da je jednaka v, a kut BAC mora biti jednak kutu α.

Mi smo u stvari svoj zadatak preinačili promijenivši mu i nepoznanicu i zadane podatke. Nova nepoznanica je tačka, stara je bila trokut. Jedan dio podataka isti je doduše u oba zadatka: dužina v i kut α, no u starom zadatku bila je zadana dužina a, a sad umjesto nje imamo dvije tačke: B i C.

Novi zadatak nije težak. Naredna preporuka vodi nas posve blizu rješenju.



Sl. 26.

Rastavi razne dijelove uvjeta! Uvjet ima dva dijela. Prvi dio odnosi se na zadani podatak v, a drugi dio na zadani podatak a. Traži se da nepoznata tačka:

(I) leži u udaljenosti v od dužine $\overline{BC}$ i

(II) bude vrh kuta zadane veličine α, kome kraci prolaze zadanim tačkama B i C.

Ako *zadržimo samo jedan dio uvjeta, a odbacimo drugi,* nepoznata tačka nije potpuno određena. Ima mnogo tačaka koje zadovoljavaju dio (I) uvjeta, naime sve tačke na paraleli s dužinom $\overline{BC}$ u udaljenosti v od $\overline{BC}$[7]. Ova je paralela geometrijsko mjesto tačaka koje ispunjavaju dio (I) uvjeta. Geometrijsko mjesto tačaka koje ispunjavaju dio (II) jest izvjesni kružni luk, kome su krajnje tačke B i C. Oba ćemo mjesta nacrtati; njihovo sjecište je tačka koju je trebalo konstruirati.

Postupak što smo ga upravo primijenili zavređuje pažnju. Rješavajući geometrijske konstruktivne zadatke, mi ćemo često moći uspješno raditi po obrascu: Svedi zadatak na konstrukciju tačke pa konstruiraj tu tačku kao sjecište dvaju geometrijskih mjesta!

Međutim, izvjestan korak u ovom postupku ima i općenitije značenje. Rješavamo li ma kakav »odredbeni zadatak«, možemo raditi po obrascu: *Zadrži samo jedan dio uvjeta, a odbaci dugi dio!* Radeći tako, slabimo uvjet danog zadatka, manje ograničavamo nepoznanicu. *Dokle je tada nepoznanica određena, kako se ona može mijenjati?* Tim pitanjem postavljamo u stvari nov zadatak. Ako je nepoznanica jedna tačka ravnine (kao u našem prethodnom primjeru), rješenje novog zadatka sastoji se u tome da se odredi jedno geometrijsko mjesto koje opisuje ta tačka. Ako je nepoznanica nekakav drugi matematički objekt (u § **18.** bila je ona kvadrat), moramo izvjestan skup objekata valjano opisati i tačno karakterizirati. Pa i onda ako nepoznanica uopće nije matematički objekt (kao što će to biti u primjeru pod 8) bit će korisno razmatrati, karakterizirati, opisati ili srediti objekte koji ispunjavaju dio uvjeta što ga nepoznanici dani zadatak nameće.

8. *Primjer.* U nekoj zagonetki našli smo ovakav opis jedne riječi:

»Dio stroja (sprijeda i straga) — 5 slova«.

Što je nepoznato? Jedna riječ.

Kako glasi uvjet? Riječ ima 5 slova. Označuje nešto u vezi s nekim strojem. Nadajmo se da riječ nije previše neobična.

[7] Pravac BC dijeli ravninu u dvije poluravnine. Jednu poluravninu odaberemo za konstrukciju tačke A, pa tako treba da razmatramo samo jednu paralelu s $\overline{BC}$; inače bismo morali razmatrati dvije takve paralele.

Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice? Nije. Ili, bolje reći, bit će da je dovoljan, no dio uvjeta koji je ovog časa jasan sigurno nije dovoljan. Ima previše riječi koje ga zadovoljavaju, npr. »kotač«, »remen« i kojekakve druge.

Uvjet je izražen dvosmisleno — zacijelo namjerno. Ako ne možemo naći ništa što bi dovoljno uvjerljivo značilo neki »prednji dio« stroja, a ujedno bilo i »stražnji dio«, možda ćemo doći na pomisao da se tu radi o *čitanju* sprijeda i straga. Bilo bi dobro ispisati ovakvu interpretaciju opisa.

Rastavi razne dijelove uvjeta! Uvjet ima dva dijela. Jedan se dio odnosi na značenje riječi, a drugi na njeno sricanje. Traži se da nepoznata riječ bude:

(I) jednostavna riječ, koja znači dio nekog stroja,

(II) riječ od 5 slova, koja čitana straga također označuje dio nekog stroja.

Ako *zadržimo samo jedan dio uvjeta, a odbacimo drugi,* nepoznanica nije potpuno određena. Ima mnogo riječi koje zadovoljavaju dio (I) uvjeta; imamo neke vrste geometrijsko mjesto. To geometrijsko mjesto možemo »opisati« i »pratiti« do njegova »sjecišta« s geometrijskim mjestom (II). Postupat ćemo prirodno ako se koncentriramo na dio (I) uvjeta, tj. sakupljajmo riječi koje imaju traženo značenje, pa zatim ispitujemo imaju li takve riječi 5 slova i da li čitana odostrag imaju traženi smisao. Takvih riječi trebat će sakupiti više prije no što naiđemo na onu pravu: kotač, remen, vijak, cijev, motka, motor.

Pa jasno: »rotor«!

9. Mi smo u bilješci 3. klasificirali mogućnosti dobivanja novog »odredbenog zadatka« ponovnim sastavljanjem izvjesnih elemenata danog »odredbenog zadatka«. Ne uvodimo li jedan nov zadatak, već dva ili više njih, broj mogućnosti bit će veći. Mi ih spominjemo, ali se u klasificiranje nećemo upuštati.

A ima još mogućnosti. Specijalno, rješenje nekog »odredbenog zadatka« može ovisiti o rješenju »dokaznog zadatka«. Tu važnu mogućnost samo spominjemo; s obzirom na prostor ne možemo o njoj diskutirati.

10. Dodat ćemo nekoliko kratkih napomena o »dokaznim zadacima«. One su analogne prethodnim opširnijim napomenama o »odredbenim zadacima« (2. do 9).

Pošto smo takav zadatak shvatili kao cjelinu, treba da općenito ispitamo njegove glavne dijelove. Glavni dijelovi jesu: pretpostavka i tvrdnja teorema što ga valja ili dokazati ili opovrgnuti. Ove dijelove moramo temeljito razumjeti: *Što je pretpostavka? Što je tvrdnja?* Moramo li zalaziti u pojedinosti, možemo *rastaviti razne dijelove pretpostavke* i svaki njezin dio razmatrati za se. Zatim možemo prijeći na ostale detalje rastavljajući zadatak sve dalje i dalje.

Pošto smo rastavili zadatak, nastojat ćemo da njegove elemente na neki nov način ponovo sastavimo. Specijalno: pokušat ćemo da te elemente sastavimo u jedan drugi teorem. U tom pogledu postoje tri mogućnosti.

(1) *Zadržavamo tvrdnju*, a mijenjamo pretpostavku. Najprije pokušavamo da se takvog teorema sjetimo: *Promotri tvrdnju! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog teorema koji sadrži istu ili sličnu tvrdnju!* Ako nam ne uspije da se sjetimo takvog teorema, pokušat ćemo da ga smislimo: *Možeš li zamisliti drugu neku pretpostavku iz koje bi lako mogao izvesti tvrdnju?* Mi možemo hipotezu mijenjati tako da nešto izostavimo, a ništa ne dodamo: *Zadrži samo jedan dio pretpostavke, a odbaci drugi dio; je li tvrdnja tada još valjana?*

(2) *Zadržavamo pretpostavku, a mijenjamo tvrdnju: Možeš li iz pretpostavke izvesti što korisno?*

(3) *Mijenjamo i pretpostavku i tvrdnju.* Tome ćemo biti skloni ako nam nije uspjelo da promijenimo samo jedno. *Možeš li promijeniti pretpostavku, ili tvrdnju, ili — ako treba — oboje tako da nova pretpostavka i nova tvrdnja budu međusobno bliže?*

Razne druge mogućnosti nastaju ako radi rješenja danog »dokaznog zadatka« uvodimo dva nova »dokazna zadatka« ili više njih, ili pak ako dani zadatak povezujemo s prikladnim »odredbenim zadatkom«. Te slučajeve nećemo ovdje klasificirati.

Reductio ad absurdum i indirektan dokaz su razni, no srodni postupci.

Reductio ad absurdum pokazuje neispravnost neke tvrdnje time što iz nje izvodi nešto očito besmisleno. »Svođenje na besmisao« je matematički postupak, no on donekle nalikuje ironiji, omiljenom postupku satiričara. Ironija prividno prihvaća izvjesno mišljenje, pa ga naglašavanjem i pretjeravanjem dovodi do očitog apsurda.

Indirektan dokaz ustanovljuje istinitost neke tvrdnje time što pokazuje da je suprotna tvrdnja neistinita. Prema tome, indirektan dokaz nalikuje donekle politikantskom triku da se proturi jedan kandidat tako što se razori ugled protukandidata.

I »reductio ad absurdum« i indirektan dokaz djelotvorna su sredstva otkrivanja, koja se posve prirodno nude čovjeku koji razmišlja. Ipak ih neki filozofi i mnogi početnici ne vole. To je donekle razumljivo; ironični ljudi i podmukli politikanti ne sviđaju se svakom. Mi ćemo najprije primjerima ilustrirati djelotvornost tih postupaka, a zatim razmotriti prigovore protiv njih.

1. *Reductio ad absurdum.* Treba napisati nekoliko brojeva tako da u njima svaka od deset cifara dolazi upravo jedanput, a suma tih brojeva da iznosi tačno 100.

U nastojanju da riješimo ovaj zadatak naići ćemo na neka vrlo poučna mjesta.

Što je nepoznato? Skup brojeva. Cijelih, prirodnih.

Što je zadano? Broj 100.

Kako glasi uvjet? Uvjet se sastoji od dva dijela. Prvo, ispisujući traženi skup brojeva, moramo upotrijebiti svaku od deset cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i to svaku ni više ni manje nego jedanput. Drugo, suma svih brojeva u tom skupu mora biti 100.

Zadrži samo jedan dio uvjeta, a odbaci drugi dio! Sam prvi dio lako je zadovoljiti. Uzmi npr. skup brojeva: 19, 28, 37, 46, 50; svaka cifra pojavljuje se tačno jedanput. Međutim, drugi dio uvjeta nije ispunjen; suma tih brojeva jest 180, a ne 100. No možemo i bolje:

$$19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99$$

Prvi dio uvjeta je ispunjen, a drugi dio je gotovo ispunjen; imamo 99 umjesto 100. Dakako, ako odbacimo prvi dio uvjeta, drugi ćemo dio lako moći zadovoljiti:

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100$$

Prvi dio nije ispunjen: brojka 1 pojavljuje se dvaput, a 0 nijedanput; s ostalim brojkama sve je u redu. Kušaj dalje!

Nekoliko daljnjih bezuspješnih pokušaja dovest će nas možda ipak do naslućivanja da broj 100 uopće nije moguće dobiti na traženi način. Napokon dolazimo do zadatka: *Dokaži da je nemoguće zadovoljiti istodobno oba dijela zadanog uvjeta!*

I dobri će učenici možda pomisliti da taj zadatak prelazi njihove snage. Međutim, odgovor je prilično lak, samo treba zauzeti pravilan stav. *Valja ispitati hipotetičnu situaciju, gdje su zadovoljena oba dijela uvjeta.*

Sumnjamo u mogućnost takve situacije, i ta sumnja, koja se temelji na iskustvu, stečenom u bezuspješnim pokušajima, nije neosnovana. No, ipak ćemo biti širokogrudni i razmatrati situaciju u kojoj su hipotetički, tobože, navodno zadovoljena oba dijela uvjeta. Polazimo dakle od zamišljenog skupa brojeva, kojih je suma 100. To su jednoznamenkasti ili dvoznamenkasti brojevi. U njima ima deset mjesta. Znamenke na tim mjestima moraju se između sebe razlikovati jer se svaka od znamenaka 0, 1, 2 . . ., 9 mora pojavljivati tačno jedanput. Suma svih deset znamenaka iznosi

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Neke od tih znamenaka označuju jedinice, a druge desetice. Uz malo oštroumlja doći ćemo na pomisao da *suma znamenaka na mjestu desetica* može nešto značiti. Označimo tu sumu sa t. Tada je suma preostalih znamenaka koje označuju jedinice jednaka $45 - t$. Dakle, suma svih brojeva toga skupa mora biti

$$10\,t + (45 - t) = 100$$

Dobili smo jednadžbu iz koje se može odrediti t. To je jednadžba prvog stepena, koja daje

$$t = \frac{55}{9}$$

Došli smo do nečega što sigurno ne valja. Nađena vrijednost za t nije cio broj, a t svakako mora biti cio broj. Pošavši od pretpostavke da su oba dijela uvjeta zadovoljena istodobno, došli smo do nečega što je očito besmisleno. Kako da to objasnimo? Naša prvobitna pretpostavka mora biti pogrešna; *ne možemo* istodobno zadovoljiti oba dijela uvjeta. I tako smo postigli svoj cilj, uspjeli smo dokazati da su oba dijela postavljenog uvjeta inkompatibilna.

Naše rasuđivanje predstavlja tipičnu redukciju »ad absurdum«.

2. *Napomene.* Obazret ćemo se na prethodno rasuđivanje kako bismo shvatili njegovu opću liniju.

Želimo dokazati da je nemoguće ispuniti izvjestan uvjet, tj. da nikad ne može nastati situacija u kojoj bi istodobno bili zadovoljeni svi dijelovi uvjeta. No, ako još ništa nismo dokazali, moramo razmotriti mogućnost da bi takva situacija mogla nastati. Samo ako otvoreno razmotrimo i pomno ispitamo hipotetički slučaj, možemo se nadati da ćemo u njemu zapaziti neko mjesto koje je nesumnjivo pogrešno. A takvo mjesto moramo stvarno uhvatiti ako želimo uvjerljivo pokazati da je slučaj nemoguć. Odavle možemo razabrati da je postupak koji je u našem slučaju bio uspješan također i općenito prihvatljiv, razborit: valja ispitati hipotetičnu situaciju, gdje su zadovoljeni svi dijelovi uvjeta, *iako izgleda da je takva situacija krajnje nevjerojatna.*

Iskusniji čitalac razabrat će ovdje još nešto. Glavni korak našeg postupka sastojao se u tome da se postavi jednadžba za t. Mi bismo mogli doći do iste jednadžbe ne posumnjavši uopće da s uvjetom nešto nije u redu. Želimo li postaviti jednadžbu, treba da matematičkim jezikom izrazimo činjenicu da su zadovoljeni svi dijelovi uvjeta, *iako još ne znamo da li je stvarno moguće istodobno zadovoljiti sve te dijelove.*

Naš je postupak »širokogrudan«, Možemo se nadati da ćemo naći nepoznanicu koja udovoljava uvjetu, a možemo i očekivati da će se pokazati nemogućnost udovoljenja. U izvjesnom pogledu to nije toliko važno: istraživanje, ako se vodi dobro, počinje u oba slučaja na isti način — ispitivanjem hipotetične situacije, u kojoj je uvjet ispunjen — pa se tek u kasnijem radu pokazuje koje je očekivanje bilo opravdano.

Usporedi: SLIKE, 2. usporedi i: PAPUS; analiza koja završava time da opovrgava postavljen teorem ili pokazuje da dani »odredbeni zadatak« nema rješenja zapravo je »reductio ad absurdum«.

3. *Indirektan dokaz.* Prosti brojevi ili prim brojevi, npr. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... jesu brojevi koji se ne mogu rastaviti na manje faktore, iako su ti brojevi veći od 1. (Posljednjom klauzulom isključuje se broj 1, koji se očito ne može rastaviti na manje faktore, ali je kvalitativno drugačiji, pa ga ne treba smatrati prim brojem.) Prim brojevi su »posljednji elementi« na koje se mogu rastaviti svi cijeli brojevi (veći od 1). Na primjer:

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

rastavljen je u produkt od pet prim brojeva.

Je li niz prim brojeva beskonačan ili nije? Prirodno je pomisliti da niz prim brojeva nikad ne završava. Kad bi on negdje završavao, mogli bi se svi cijeli brojevi rastaviti na konačno mnogo posljednjih elemenata, i svijet bi izgledao tako reći »presiromašan«. Pojavljuje se dakle zadatak da se dokaže egzistencija beskonačnog skupa prim brojeva.

Zadatak se veoma razlikuje od elementarnih matematičkih zadataka uobičajene vrste i u prvi se mah čini nepristupačan. No, kao što već rekosmo, vrlo je nevjerojatno da egzistira neki posjednji prim broj, nazovimo ga P. Zašto je to tako nevjerojatno?

Razmotrit ćemo otvoreno nevjerojatni slučaj i hipotetički uzeti, pretpostaviti, ustvrditi da postoji posljednji prim broj P. Tada bismo mogli ispisati potpuni niz prim brojeva 2, 3, 5, 7, 11, ..., P. Zašto je ovo tako nevjerojatno? Što je na tom

pogrešno? Možemo li ukazati na nešto što je nesumnjivo pogrešno? Možemo. Mi možemo konstruirati broj

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P) + 1$$

Ovaj broj Q veći je od P i stoga, prema pretpostavci, ne može biti prim broj. Broj Q mora dakle biti djeljiv s nekim prim brojem. Prema pretpostavci, u nizu 2, 3, 5, ..., P iscrpeni su svi prim brojevi uopće; no Q daje, kad se podijeli bilo kojim od tih brojeva, ostatak 1; dakle Q nije djeljiv ni s jednim od spomenutih prim brojeva (a to su — prema pretpostavci — svi prim brojevi uopće)! Tu mora postojati nešto što je nesumnjivo pogrešno; Q mora ili biti prim broj ili mora biti djeljiv nekim prim brojem. Pošavši od pretpostavke da postoji posljednji prim broj P, došli smo do očitog apsurda. Kako da to objasnimo? Naša prvobitna pretpostavka mora biti pogrešna; ne može postojati posljednji prim broj P. I tako smo uspjeli dokazati da niz prim brojeva nikad ne završava.

Naš je dokaz tipičan indirektan dokaz. (To je, uostalom, glasoviti dokaz; on pripada Euklidu; vidi 20. propoziciju u IX knjizi »Elemenata«.)

Mi smo svoj teorem (da je niz prim brojeva beskonačan) dokazali time što smo opovrgnuli njegovu kontradiktornu protivnost (da niz prim brojeva negdje završava). Protivnost smo opovrgli time što smo iz nje izveli očiti apsurd. Tako smo povezali indirektni dokaz s redukcijom »ad absurdum«; ova je kombinacija također vrlo tipična.

4. *Prigovori.* Postupci koje smo ovdje obrađivali nailazili su na priličan otpor. Iznijeti su mnogi prigovori, koji su — možda — samo razni oblici istog osnovnog prigovora. Ovdje ćemo raspraviti jedan »praktičan« oblik prigovora, koji je prilagođen našim razmatranjima.

Naći dokaz koji nije očevidan značajno je intelektualno dostignuće, ali je i za učenje i za temeljito shvaćanje takva dokaza potreban izvjestan umni napor. Prilično je shvatljivo ako hoćemo da nam ostane neka korist od našeg napora; razumije se da ono što zadržavamo u svom pamćenju treba da je istinito i tačno, a ne pogrešno ili apsurdno.

No čini se da je teško zadržati nešto istinito iz redukcije »ad absurdum«. Postupak započinjemo pogrešnom pretpostavkom i iz nje izvodimo konzekvencije koje su isto tako — samo možda vidljivije — pogrešne dok ne dođemo do posljednje konzekvencije, koja je očito pogrešna. Ako ne bismo željeli da u svom pamćenju prikupljamo neistine, morali bismo što je moguće brže sve zaboraviti. Međutim, to nije provedivo jer smo sve momente tokom dokazivanja morali čvrsto i tačno pamtiti.

Prigovor indirektnim dokazima može se sad izreći vrlo kratko. Slušamo li takav dokaz, prisiljeni smo da kroz čitavo vrijeme upravljamo svoju pažnju na pogrešnu pretpostavku, koju treba zaboraviti, a ne na ispravan teorem, koji valja zapamtiti.

Želimo li pravilno prosuditi vrijednost ovih prigovora, potrebno je razlikovati dva načina upotrebe redukcije »ad absurdum«. Jednom se ona upotrebljava kao oruđe istraživanja, a drugi put kao sredstvo izlaganja. Jednako razlikovanje potrebno je kod indirektnog dokaza.

Valja priznati da »reductio ad absurdum« nije baš najzgodnije sredstvo izlaganja. Takvo »svođenje«, osobito ako je dugo, može zaista biti vrlo mučno za čitaoca ili slušaoca. Svi izvodi koje po redu ispitujemo korektni su, ali su nemoguće sve situacije koje treba razmatrati. Pa i jezični izraz može postati dosadan ako — kao što treba — inzistiramo na stalnom naglašavanju da sve počiva na prvobitnoj pretpostavci. Neprestano se moramo vraćati na riječi »hipotetički«, »prema pretpostavci«, »kao što smo uzeli«, ili pak moramo upotrijebiti neku drugu doskočicu u tom smislu. Mi želimo situaciju odbaciti i zaboraviti kao nemoguću, a moramo je pamtiti i ispitivati kao temelj za naredni korak. Ovaj unutrašnji nesklad može napokon postati nepodnošljiv.

Međutim, ne bi bilo pametno ako bismo zabacili redukciju »ad absurdum« kao oruđe otkrivanja. To se oruđe može posve prirodno pojaviti i dovesti do odluke kad se čini da su iscrpena sva ostala sredstva. To se vidjelo u prethodnim primjerima.

Iskustvo pokazuje da ne postoji bitna oprečnost između naša dva stanovišta. Obično se uz malo teškoća indirektan dokaz dade preinačiti u direktan, a dokaz dobiven dugom redukcijom »ad absurdum« dade se preurediti u pogodniji oblik, iz kojeg »reductio ad absurdum« potpuno nestaje (ili se može, nakon odgovarajućih priprema, zbiti u nekoliko zgodnih rečenica).

Ukratko, želimo li potpuno iskoristiti svoje sposobnosti, moramo poznavati i redukciju »ad absurdum« i indirektan dokaz. No, ako nam uspije da izvedemo rezultat jednom od tih metoda, moramo se svakako obazreti na rješenje i pitati: *Možeš li rezultat izvesti drugačije?*

Ovo što smo rekli ilustrirat ćemo primjerima.

5. *Preuređenje redukcije »ad absurdum«.* Osvrnimo se na rasuđivanje iz bilješke 1. »Reductio ad absurdum« polazila je od situacije koja se na kraju pokazala nemogućom. Izlučimo, međutim, dio dokaza koji ne ovisi o prvobitnoj pogrešnoj pretpostavci; dio koji sadrži sama pozitivna znanja! Tada ćemo zapaziti da nesumnjivo vrijedi ovo: Ako je neki skup jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva ispisan tako da se svaka od deset cifara pojavljuje tačno jedanput, suma toga skupa ima oblik

$$10\,t + (45 - t) = 9\,(t + 5)$$

Ova je suma djeljiva s 9. Međutim, dani zadatak traži da suma bude 100. Je li to moguće? Nije moguće jer broj 100 nije djeljiv brojem 9.

»Reductio ad absurdum«, koja nas je dovela do otkrića dokaza, nestala je iz našeg novog prikaza.

Uzgred rečeno, čitalac koji zna »pokus brojem 9« moći će sada čitav dokaz sagledati na prvi pogled.

6. *Preinačenje indirektnog dokaza.* Osvrnimo se na rasuđivanje iz bilješke 3. Pažljivim razmatranjem naći ćemo elemente dokaza koji su neovisni o pogrešnoj pretpostavci. No ipak, do najboljeg ključa zadatka doći ćemo ako pomno preispitamo značenje samog originalnog zadatka.

Što mislimo kad kažemo da niz prim brojeva nikad ne završava? Očito mislimo upravo ovo: ako smo dobili konačni skup prim brojeva 2, 3, 5, 7, 11, . . ., P, gdje je P posljednji dotada nađeni prim broj, onda uvijek postoji neki daljnji prim broj. Što nam dakle valja činiti da dokažemo egzistenciju beskonačnog skupa prim brojeva? Moramo pokazati način kako se može pronaći neki prim broj koji je različit od svih dotada nađenih prim brojeva. Time je naš »dokazni zadatak« u stvari preveden na »određeni zadatak«: *Zadani su prim brojevi* 2, 3, 5, . . ., P; *odredi novi prim broj N koje je različit od svih zadanih!*

Izrazivši svoj prvobitni zadatak u ovom novom obliku, učinili smo glavni korak. Sada se razmjerno lako može vidjeti kako treba bitne dijelove prijašnjeg dokaza iskoristiti za novi cilj. Broj

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P) + 1$$

svakako je djeljiv jednim prim brojem. Uzmimo sad — u tom je ideja — neki prim djelilac od Q (npr. najmanji) kao N. (Dakako, ako je Q slučajno prim broj, onda je $N = Q$.) Očito je da Q, ako ga podijelimo ma kojim od prim brojeva 2, 3, 5, . . ., P, daje ostatak 1, pa zbog toga nijedan od tih brojeva ne može biti N, koji je djelilac od Q. Sad imamo sve što nam je potrebno: N je prim broj, a različit je od svih dotada nađenih prim brojeva 2, 3, 5, 7, 11, . . ., P.

Ovaj nam dokaz daje određeni postupak za neograničeno produžavanje niza prim brojeva. Tu nije ništa indirektno, tu ne treba razmatrati nikakvu nemoguću situaciju. Ipak, uzeto u osnovi, dokaz je isti, kao i naš prijašnji indirektni dokaz, koji smo ovdje samo uspješno preinačili.

Simetrija ima dva značenja: jedno običnije, posebno, geometrijsko značenje i drugo manje obično, opće, logičko značenje.

U elementarnoj prostornoj geometriji važne su dvije vrste simetrije: simetrija s obzirom na ravninu (nazvanu ravninom simetrije) i simetrija s obzirom na tačku (nazvanu središtem simetrije). Čovječje tijelo čini se potpuno simetričnim, ali u stvari nije; mnogi unutrašnji organi raspoređeni su potpuno nesimetrično. Kip može biti potpuno simetričan s obzirom na vertikalnu ravninu tako da obje njegove polovine budu međusobno »zamjenljive«.

U širem značenju riječi neku cjelinu nazivamo simetričnom ako su joj dijelovi međusobno zamjenljivi. Ima mnogo vrsta simetrije, već prema broju zamjenljivih dijelova i prema operacijama koje zamjenjuju te dijelove. Kocka, na primjer, ima visok stupanj simetrije; svaka od 6 ploha, zamjenljiva je sa svakom drugom, isto to imamo za 8 vrhova, isto i za 12 bridova. Izraz

$$yz + zx + xy$$

jest simetričan; bilo koja dva od tri slova x, y, z možemo međusobno zamijeniti, a da se izraz ne promijeni.

Simetrija u svom općem značenju važna je za pitanja koja ovdje obrađujemo. Ako je zadatak u nekom pogledu simetričan, možemo se okoristiti razmatranjem dijelova koji su međusobno zamjenljivi, a često će biti zgodno ako te dijelove, koji imaju istu ulogu, obrađujemo na isti način. (Vidi: POMOĆNI ELEMENTI, 3.)

Nastoj obrađivati simetrično ono što je simetrično, i ne razaraj lakoumno prirodnu simetriju! Međutim, katkad smo ipak prisiljeni da obrađujemo nesimetrično ono što je po prirodi simetrično. Par rukavica sigurno je simetričan, a ipak nitko s rukavicama ne barata potpuno simetrično. Nitko ne navlači obje rukavice istovremeno, već jednu za drugom.

Simetrija može koristiti i u kontroli rezultata; vidi § 14.

»Sjajna ideja«, »dobra ideja«, »sinulo mu je« — svakodnevni su izrazi koji opisuju nagli prodor k rješenju; vidi: NAPREDAK I DOSTIGNUĆE, 6. Svatko je doživio da mu padne na um neka sjajna ideja, ali bi to teško umio opisati. Bit će stoga interesantno napomenuti da je vrlo sugestivan opis toga dao čak jedan Aristotel.

Većina ljudi saglasit će se s tim da je pojavljivanje sjajne ideje »akt oštroumlja«. Aristotel definira »oštroumlje« ovako: »Oštroumlje znači: pogoditi, odgonetnuti bitnu vezu u vanredno kratko vrijeme. Tako npr. ako vidiš nekog gdje razgovara s bogatašem na izvjestan način možeš u trenu pogoditi da taj želi od bogataša pozajmiti novaca. Ili, ako primijetiš da je svijetla strana Mjesečeva uvijek okrenuta prema Suncu, pa iznenada uvidiš zašto je to tako; naime zato što Mjesec prima svjetlost od Sunca[8].«

Prvi primjer nije loš, ali je prilično trivijalan. Ne treba naročitog oštroumlja da se nadođe na stvari međusobno povezane, kao što su bogataš i novac. Ideja nije previše sjajna. Drugi naš primjer, međutim, mora impresionirati ako pokušamo da se malo uživimo u njegovu inscenaciju.

Moramo biti svjesni da je Aristotelov suvremenik morao promatrati Sunce i zvjezde ako je želio znati koje je doba dana — nije bilo ručnih ura. Morao je motriti Mjesečeve faze ako je namjeravao putovati noću — nije bilo ulične rasvjete. On je nebo poznavao mnogo bolje nego moderni velegrađanin, a njegova prirodna inteligencija nije bila pomućena sirovim fragmentima novinskih članaka o astronomskim teorijama. U uštapu je gledao ravnu ploču, sličnu Sunčevoj, samo mnogo manje svijetlu. Mora da se čudio neprestanom mijenjanju oblika i položaja Mjesečeva. Katkad je promatrao Mjesec i danju, pri izlasku i pri zalasku Sunca, i našao da je »svijetla strana Mjesečeva uvijek okrenuta prema Suncu«. Ovo je već samo po sebi bila značajna konstatacija. A tada je spazio da je raznolik izgled Mjesečev sličan raznolikom izgledu kugle, osvijetljene s jedne strane tako da je jedna polovina svijetla, a druga tamna. Otada on Sunce i Mjesec ne zamišlja više kao ravne ploče, već kao okrugla tijela, od kojih jedno daje svjetlost, a drugo je prima. On zahvaća bitnu vezu, preuređuje svoje ranije predodžbe smjesta, »u vanredno kratko vrijeme«. To je nagli skok fantazije, sjajna ideja, bljesak genija.

Slike nisu samo predmet geometrijskih zadataka već nam one pružaju značajnu pomoć i kod svih vrsta zadataka u kojima na početku nema ništa geometrijsko. Prema tome imamo dva dobra razloga da se osvrnemo na važnost slika u rješavanju zadataka.

1. Ako je naš zadatak geometrijski, moramo razmatrati sliku. Slika može postojati u našoj mašti ili je možemo nacrtati na papiru. U nekim prilikama bit će možda poželjno da sliku zamislimo ne crtajući je. Međutim, ako moramo po redu ispitivati razne detalje, poželjno je *nacrtati sliku*. Ako detalja ima mnogo, nećemo ih sve moći istodobno sebi predočiti. A na papiru su svi zajedno. Detalj, zamišljen u mašti, možemo zaboraviti, dok detalj, nacrtan na papiru, ostaje. Kada do njega ponovo dođemo, on će nas podsjetiti na naše prijašnje napomene i pri tom nam uštedjeti dosta truda.

2. Sad ćemo potanje razmotriti upotrebu slika u geometrijskim konstruktivnim zadacima.

Iscrpno razmatranje takva zadatka započinjemo time da nacrtamo sliku koja sadrži nepoznanicu i zadane elemente, i to u onakvu sklopu kakav propisuje uvjet zadatka. Da bismo zadatak jasno shvatili, moramo odvojeno razmatrati svaki zadani element i svaki dio uvjeta; zatim ponovo sjedinjujemo sve dijelove i razmatramo uvjet kao cjelinu. Pri tom ćemo nastojati da istovremeno sagledamo razne veze koje zadatak zahtijeva. Bez nacrtane slike jedva bismo mogli sve te pojedinosti obrađivati, razdvajati, ponovo sastavljati.

Međutim, netko će posumnjati da li je uopće moguće nacrtati takvu sliku prije nego što konačno riješimo zadatak. Je li moguće zadovoljiti čitav uvjet koji je zadatkom postavljen? Nemamo prava da na ovo pitanje odgovorimo potvrdno prije nego dobijemo konačno rješenje; pa ipak na samom početku pretpostavljamo sliku u kojoj je nepoznanica sa zadanim elementima povezana onako kako to uvjet propisuje. Čini se kao da — crtajući sliku — činimo neovlaštenu pretpostavku.

Ipak, mi to ne činimo. Ili bar bezuvjetno ne činimo. Ne postupamo nekorektno ako — istražujući svoj zadatak — razmatramo *mogućnost* da postoji objekt koji udovoljava uvjetu postavljenom za nepoznanicu, a u traženoj je vezi sa zadanim elementima — uz uvjet da ne brkamo mogućnost sa sigurnošću. Sudac ne postupa nekorektno kad — ispitujući optuženog — uzima u obzir i pretpostavku da je optuženi počinio dotični zločin — uz uvjet da se te pretpostavke slijepo ne drži. I matematičar i sudac mogu bez prejudiciranja ispitivati neku mogućnost, a svoj konačan sud odgoditi dok istraga ne dade konačan rezultat.

[8] Tekst je neznatno preuređen. Tačniji prijevod može se vidjeti u djelu Williama Whewella: »*The Philosophy of the Inductive Sciences*« (1847), sv. II, str. 131.

Metodu koja se sastoji u tome da se istraživanje konstruktivnog zadatka započinje crtanjem skice (u kojoj se pretpostavlja da je zadovoljeno uvjetu) nalazimo još u grčkih geometara. Na to nas upućuje kratka, ponešto zagonetna rečenica Papusova: »*Uzmi ono što treba učiniti kao već učinjeno!*« Slijedeći savjet nije toliko sažet, ali je jasniji: »*Nacrtaj hipotetičnu sliku, u kojoj se pretpostavlja da je uvjetu zadatka udovoljeno u svim njegovim dijelovima!*«

To je savjet za geometrijske konstruktivne zadatke, no zapravo se uopće ne moramo ograničiti ni na kakvu specijalnu vrstu zadataka. Taj savjet možemo protegnuti na sve »odredbene zadatke« ako ga formuliramo općenitije: »*Ispitaj hipotetičnu situaciju, u kojoj se pretpostavlja da je uvjetu zadatka potpuno udovoljeno!*«

Usporedi: PAPUS, 6.

3. Raspravit ćemo sada neke momente koji se pojavljuju pri stvarnom crtanju slika.

(I) Da li da slike crtamo tačno ili približno, crtaćim priborom ili prostoručno?

I jedna i druga vrsta slika ima neku svoju prednost. Načelno, egzaktne slike u geometriji imaju istu ulogu kao i egzaktna mjerenja u fizici. Međutim, u praksi su egzaktne slike manje važne od egzaktnih mjerenja jer se geometrijski teoremi provjeravaju ekstenzivnije nego fizički zakoni. No, početnik neka crta mnogo slika koliko može tačnije kako bi stekao dobru eksperimentalnu bazu. A naprednijem pak egzaktne slike mogu nagovijestiti koji geometrijski teorem. Ipak: za razmišljanje su obično dovoljne slike koje su pažljivo nacrtane prostom rukom. I mnogo brže ih crtamo. Dakako da slike ne smiju izgledati apsurdno: crte koje prikazuju pravce ne smiju biti valovite, a takozvane kružnice ne smiju nalikovati krumpirima.

Netačna slika može katkad sugerirati pogrešan zaključak, no opasnost nije jako velika. Od nje se možemo zaštititi na razne načine, u prvom redu variranjem slike. Opasnosti nema ako se koncentriramo na logičke veze i ako smo svjesni da je slika samo pomoć našim zaključcima, a nikako njihova baza. Prava baza su logičke veze. [Ovaj moment na poučan

način ilustriraju izvjesni dobro poznati paradoksi, koji vješto iskorišćuju namjernu netačnost na slici.]

(II) Važno je da su elementi sastavljeni u njihovim traženim odnosima, a nije važno kojim ih redom konstruiramo. Stoga valja birati najpraktičniji redoslijed. Da bismo, na primjer, objasnili ideju trisekcije kuta, želimo nacrtati dva kuta α i β tako da bude $\alpha = 3\beta$. Pođemo li od proizvoljnog kuta α, ne možemo kut β konstruirati. Stoga ćemo najprije odabrati dosta malen, ali inače proizvoljan kut β i tada, polazeći od β, možemo kut α lako konstruirati.

(III) Slika ne smije sugerirati neku nezgodnu specijalizaciju. Razni dijelovi slike ne smiju pokazivati neke prividne odnose koji se u zadatku ne traže. Dužine ne smiju ispasti jednake, ili pravci okomiti, ako to nije nužno. Trokuti neka se ne doimaju kao jednakokračni ili kao pravokutni ako se to u zadatku ne zahtijeva. Trokut s kutovima 45^0, 60^0, 75^0 jest taj koji je u strogom smislu riječi »najudaljeniji« i od jednakokračnog i od pravokutnog[9]. Zato: ako želiš razmatrati »opći« trokut, crtaj ovaj trokut, ili trokut koji se od ovog malo razlikuje.

(IV) Želimo li naročito istaknuti različite uloge raznih crta, možemo upotrebljavati deblje i tanje crte, pune i isprekidane, a možemo ih izvlačiti i u raznim bojama. Ako se za neke crte još nismo potpuno odlučili da li da ih upotrijebimo kao pomoćne crte, crtajmo ih veoma tanko. Zadane elemente možemo crtati crveno. Možemo upotrijebiti i druge boje da bismo istakli neke važne dijelove, npr. dva slična trokuta, itd.

(V) Da li da, objašnjavajući stereometrijska pitanja, upotrebljavamo trodimenzionalne modele ili crteže na papiru (odnosno na školskoj ploči)?

---

[9] Ako su kutovi trokuta α, β, γ, te $90^0 > \alpha > \beta > \gamma$, tada bar jedna između diferencija $90^0 - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ iznosi $< 15^0$ ako nije $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$. Zaista:

$$\frac{3(90^0 - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15^0.$$

Trodimenzionalni modeli su poželjni, ali ih je dosta nezgodno izrađivati, a i skupi su. Morat ćemo se obično zadovoljiti s crtežima, premda ih nije lako učiniti zornima. Za početnika je poželjno da stekne nešto iskustva s modelima koje je sam izradio iz kartona. Korisno je ako za prikazivanje geometrijskih pojmova uzimamo predmete iz svoje svakidašnje okoline. Tako nam, na primjer, kutija, opeka, učionica mogu predočivati kvadar, olovka uspravan kružni valjak, sjenilo svjetiljke uspravan kružni krnji stožac itd.

4. Slike na papiru lako se crtaju, lako prepoznaju i lako pamte. Ravninske figure poznamo osobito dobro, zadaci o ravninskim figurama naročito su nam pristupačni. Tu okolnost možemo iskoristiti te svoju sposobnost operiranja slikama upotrijebiti i kod negeometrijskih objekata ako smislimo prikladan geometrijski prikaz za te negeometrijske objekte.

Doista, geometrijski prikazi, grafikoni i dijagrami svih vrsta upotrebljavaju se u svim naukama, ne samo u fizici, kemiji i biološkim naukama, već i u ekonomskim naukama, pa čak i u psihologiji. Upotrebljavajući prikladne geometrijske prikaze, nastojimo sve izraziti jezikom slika i svesti sve vrste zadataka na geometrijske zadatke.

Prema tome, ako naš zadatak i nije geometrijski, nastojat ćemo *nacrtati sliku*. Pronaći jasan geometrijski prikaz za neki negeometrijski problem — može značiti važan korak prema rješenju.

Specijalizacija je prijelaz od razmatranja zadanog skupa objekata prema razmatranju užeg skupa koji je u njemu sadržan ili prema razmatranju pojedinog objekta iz zadanog skupa. Specijalizacija je u rješavanju zadataka često korisna.

1. *Primjer*. U trokutu neka je r polumjer upisane kružnice, R polumjer opisane kružnice, a H najveća visina. Tada je

$$r + R \leqq H$$

Ovaj teorem treba ili dokazati ili opovrgnuti[10]. Pred nama je »dokazni zadatak«.

[10] »*American Mathematical Monthly*«, sv. 50. (1943), str. 124. i sv. 51 (1944), str. 234—236.

Teorem je neuobičajene vrste. Teško ćemo se moći dosjetiti nekog teorema o trokutu koji bi imao sličnu zaključnu tvrdnju. Ako nam ništa drugo ne pada na um, možemo ispitati neki *specijalni slučaj* ove neobične tvrdnje. Najpoznatiji specijalni trokut jest jednakostraničan trokut, za koji vrijedi

$$r = \frac{H}{3} \qquad R = \frac{2H}{3}$$

U ovom slučaju tvrdnja je ispravna.

Nemamo li još uvijek nikakve druge ideje, možemo ispitati *širi specijalni slučaj* jednakokračna trokuta. Oblik jednakokračna trokuta varira s kutom na vrhu. Postoje dva ekstremna (ili granična) slučaja: jedan u kome kut na vrhu postaje 0^0 i drugi gdje kut postaje 180^0. U prvom ekstremnom slučaju nestaje baza jednakokračna trokuta, i bit će očito

$$r = 0$$
$$R = \frac{1}{2} H$$

I ovdje je tvrdnja verificirana. Međutim, u drugom graničnom slučaju iščezavaju sve tri visine, i bit će

$$r = 0$$
$$R = \infty$$
$$H = 0$$

Tvrdnja ovdje ne vrijedi. Dokazali smo da je teorem pogrešan i time smo riješili svoj zadatak.

Uzgred rečeno, jasno je da je tvrdnja pogrešna i za vrlo spljoštene jednakokračne trokute kojima je kut na vrhu vrlo blizu 180^0. Prema tome možemo »službeno« zanemariti ekstremni slučaj čije se razmatranje može nekom činiti da nije posve »ortodoksno«.

2. »L' exception confirme la règle.« »Izuzetak potvrđuje pravilo«. Treba da ovu vrlo poznatu poslovicu shvatimo kao šalu smiješeći se nad nehajnošću svojevrsne logike. Shvatimo li stvar ozbiljno, svakako je dovoljan jedan jedini izuzetak,

pa da nepobitno opovrgne neko nazovipravilo ili opću postavku. Najčešća, a u izvjesnom smislu i najbolja metoda za opovrgavanje takve postavke sastoji se upravo u tome da se pokaže objekt koji je ne zadovoljava; takav objekt nazivaju neki *kontraprimjerom.*

Postavka koja je navodno općevaljana bavi se izvjesnim skupom objekata. Da opovrgnemo tu postavku, mi *specijaliziramo,* izvlačimo iz tog skupa jedan objekt, koji s tom postavkom nije u skladu. Prethodni primjer (pod 1) pokazuje kako to biva. Možemo najprije istražiti neki jednostavan specijalan slučaj, tj. neki više manje nasumce odabran objekt koji se dade lako ispitati. Ako ispitivanje pokaže da slučaj nije u skladu s općom postavkom, postavku smo pobili, a zadatak završili. Ako je pak ispitivani objekt u skladu s postavkom, možda će nam se u tom ispitivanju pojaviti neki mig. Možda ćemo steći utisak da je postavka ipak tačna, pa naslutiti u kom smjeru valja potražiti dokaz. Ili možemo, kao u primjeru pod 1, naslutiti u kojem smjeru valja potražiti kontraprimjer, tj. koje druge specijalne slučajeve treba ispitati. Možemo slučaj što smo ga upravo ispitali modificirati, varirati, istraživati neki širi specijalni slučaj, potražiti ekstremne slučajeve, kao što je to bilo izvedeno u primjeru pod 1.

Ekstremni su slučajevi osobito poučni. Ako se za neku opću postavku pretpostavlja da vrijedi za sve sisavce, onda mora vrijediti i za neobičnog sisavca koji se zove kit. Ne zaboravimo ekstremni slučaj kita! Pomoću njega možemo pobiti opću postavku. To je dobra prilika. Pronalazači generalizacija lako previđaju takve ekstremne slučajeve. Ako ipak nađemo da opća postavka vrijedi čak i u ekstremnom slučaju, tada će dobivena induktivna potvrda te postavke biti osobito jaka, i to upravo zato što su bili jaki izgledi da se postavka pobije. Prema tome poslovici od koje smo pošli gotovo da bismo mogli dati nov oblik: »Granični slučajevi potvrđuju pravilo«.

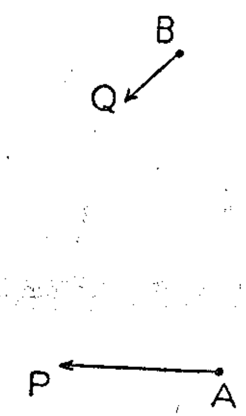
3. *Primjer.* Zadane su brzine dvaju brodova i njihov položaj u nekom određenom času. Oba broda plove pravolinijskim kursom konstantnom brzinom. Kolika je udaljenost tih brodova kad su jedan drugome najbliži?

Što je nepoznato? Najkraća udaljenost između dva pokretna tijela. Tijela ćemo smatrati materijalnim tačkama.

Što je zadano? Početne pozicije pokretnih materijalnih tačaka i njihove brzine. Te su brzine po veličini i po smjeru konstantne.

Kako glasi uvjet? Treba odrediti udaljenost kad je najkraća, tj. u trenutku kad su obje pokretne tačke (brodovi) jedna drugoj najbliže.

Nacrtaj sliku! Uvedi zgodne oznake! Tačke A i B na slici 27. označuju zadane početne pozicije dvaju brodova. Usmjerene dužine (vektori) $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{BQ}$ prikazuju zadane brzine tako da prvi brod plovi pravcem AP i prevaljuje u jedinici vremena razmak AP. Slično plovi drugi brod duž pravca BQ.



Sl. 27.

Što je nepoznato? Najkraća udaljenost dvaju brodova, od kojih jedan plovi duž AP, a drugi duž BQ.

Sad je jasno što treba naći ili, ako želimo upotrijebiti samo elementarna sredstva, bit će nam još nejasno kako da to nađemo. Zadatak nije odviše lagan, a njegova je teškoća osebujno nijansirana. Mogli bismo je izraziti riječima: »Tu je previše raznolikosti«. Početne pozicije A, B i brzine $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ mogu biti zadane na razne načine. Četiri tačke A, B, P, Q mogu u stvari biti po volji odabrane. Ma kakvi bili podaci, traženo rješenje mora se dati primijeniti, a mi još ne vidimo kako se dotično rješenje može prilagoditi svim tim mogućnostima. Iz takva osjećanja »prevelike raznolikosti« može najzad izroniti pitanje (s odgovorom):

Možeš li smisliti pristupačniji srodni zadatak? Specijalniji zadatak? Naravno, postoji ekstremni slučaj kad jedna od brzina iščezava. Brod u B neka je usidren, Q se podudara s B. Najkraća udaljenost od mirnog broda do pokretnog broda jest okomica na pravac kojim plovi pokretni brod.

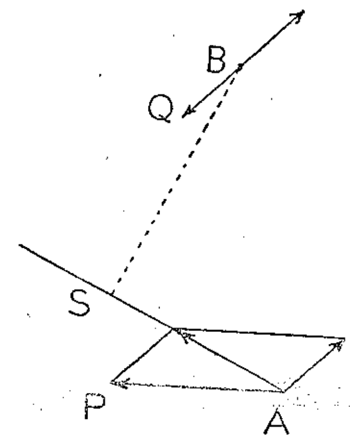
4. Ako pri pojavi prethodne ideje imamo utisak da se tu još nešto krije i ako osjećamo da će ovaj ekstremni slučaj (koji bi se možda mogao činiti prejednostavan, a da bi bio važan) imati neku ulogu — tada je to zaista sjajna ideja.

Evo, tu je zadatak koji je srodan tvom: specijaliziran zadatak koji si upravo riješio! *Možeš li ga upotrijebiti? Možeš li primijeniti njegov rezultat? Ne bi li uveo neki pomoćni element da uzmogneš upotrijebiti taj zadatak?* Treba ga upotrijebiti, ali kako? Kako se može upotrijebiti rezultat slučaja kad B miruje u slučaju kad se B *giba?* Mirovanje je *specijalni slučaj* gibanja. A gibanje je relativno — i stoga, ma kakva bila zadana brzina broda B, ja mogu B smatrati mirnim. Tu ideja postaje jasnija: Ako čitavom sistemu koji se sastoji od dva broda pridam isto jednoliko gibanje, relativni položaji neće se promijeniti, relativne udaljenosti ostat će jednake, a posebno će ostati jednaka i najkraća udaljenost brodova koja se u zadatku traži. Pridat ću jednoliko gibanje koje će brzinu jednog broda reducirati na nulu, pa će se tako opći slučaj zadatka reducirati na specijalni slučaj, koji je malo prije riješen. Pribrojit ću i k $\overrightarrow{BQ}$ i k $\overrightarrow{AP}$ brzinu, suprotnu brzini $\overrightarrow{BQ}$, a iste apsolutne veličine. To je pomoćni element, koji omogućuje upotrebu specijalnog rezultata.

Konstrukcija najkraće udaljenosti $\overline{BS}$ razabire se na sl. 28.

5. Prethodno rješenje (pod 3. i 4) zavređuje da ga — kao logički uzorak — analiziramo i zapamtimo.

Da bismo riješili svoj originalni zadatak (bilješka 3, početak), mi smo najprije riješili jedan drugi zadatak (bilješka 3, svršetak), koji smo s pravom mogli nazvati pomoćnim zadatkom. Taj je pomoćni zadatak specijalni slučaj originalnog zadatka (ekstremni specijalni slučaj, gdje jedan od brodova miruje). Originalni zadatak bio je zadan, pomoćni zadatak nađen je u toku rješavanja. Originalni zadatak činio se teškim, rješenje pomoćnog zadatka smjesta se dobilo. Pomoćni zada-



Sl. 28.

tak, kao specijalni slučaj, bio je u stvari *uži* od originalnog zadatka. Kako je onda moguće da smo mogli riješiti originalni zadatak na temelju pomoćnog zadatka? To je bilo moguće zato što smo pri reduciranju originalnog zadatka na pomoćni zadatak dodali nešto bitno: napomenu o relativnosti gibanja.

Dvoje je pridonijelo rješenju originalnog zadatka. Prvo, našli smo koristan pomoćni zadatak. Drugo, otkrili smo prikladan dodatak potreban za prijelaz od pomoćnog zadatka na originalni. Mi smo dani zadatak riješili u dva koraka, kao što neki potok prelazimo u dva koraka ako smo uspjeli u sredini otkriti neki zgodni kamen koji nam služi kao prelazno uporište.

Ukratko: mi smo lakši, uži, specijalniji pomoćni zadatak upotrijebili kao *prelazno uporište* u rješavanju težeg, šireg, općenitijeg originalnog zadatka.

6. Specijalizacija ima još mnogo drugih primjena, o kojima ovdje ne možemo raspravljati. Spomenimo samo da ona može koristiti pri kontroli rješenja (MOŽEŠ LI KONTROLIRATI REZULTAT?, 2).

Jedna, donekle primitivna, vrsta specijalizacije često koristi nastavniku. Ona se sastoji u tome da se apstraktnim matematičkim elementima zadatka dade neka *konkretna interpretacija.* Ako se, na primjer, u zadatku pojavljuje kvadar, nastavnik može upotrijebiti učionicu u kojoj govori (§8). U analitičkoj geometriji prostora može ugaona tačka učionice poslužiti kao koordinantno ishodište, pod i dva zida kao koordinatne ravnine, a dva horizontalna i jedan vertikalan brid kao koordinatne osi. Objašnjavajući pojam rotacione plohe, nastavnik crta kredom krivulju po vratima, pa ih polako otvara. Zacijelo, to su jednostavne doskočice, no ne treba propustiti ništa što bi matematiku moglo učenicima približiti. Vrlo apstraktnu matematičku nauku treba da damo veoma konkretno.

Suvremena heuristika nastoji da zahvati proces rješavanja zadataka, a napose *misaone operacije, koje* u tom procesu *pomažu na tipičan način.* Razni su izvori njenih obavještenja, i nijedan od tih izvora ne valja zanemariti. Ozbiljan studij heuristike treba da se obazire i na logičku i na psihološku pozadinu, ne smije zanemariti ni ono što o toj temi govore stari autori, kao Papus, Descartes [Dekart], Leibniz [Lajbnic] i Bolzano, no najmanje se pri tom smije omalovažiti iskustvo oslobođeno predrasuda. Iskustvo u rješavanju zadataka i iskustvo u promatranju drugih koji rješavaju zadatke treba da bude temelj heuristike. U tom studiju ne smijemo potcijeniti nijednu vrstu zadataka. Treba da pronađemo zajedničke crte u načinu obrađivanja svih vrsta problema; moramo težiti za općim karakteristikama neovisnim o temi

zadatka. Studij heuristike ima »praktične« ciljeve; bolje razumijevanje misaonih operacija, koje tipično koriste pri rješavanju zadataka, može pozitivno utjecati na nastavu, specijalno na nastavu matematike.

Ova je knjiga prvi pokušaj u ostvarivanju tog programa. Razmotrit ćemo sada kako se pojedini članci našeg leksikona uklapaju u program.

1. Naša je tabela zapravo popis misaonih operacija koje na tipičan način pomažu u rješavanju zadataka; pitanja i preporuke te tabele ukazuju na takve operacije. Neke od tih operacija opisane su i u drugom dijelu knjige, a neke se temeljitije pretresaju i objašnjavaju u prvom dijelu.

Za daljnje informacije o specijalnim pitanjima i preporukama tabele čitalac se upućuje na 15 članaka leksikona, koji imaju za naslove prve rečenice iz 15 alineja tabele: ŠTO JE NEPOZNATO, DA LI JE MOGUĆE ZADOVOLJITI UVJET? NACRTAJ SLIKU!, . . ., MOŽEŠ LI REZULTAT UPOTRIJEBITI? Ako čitalac želi da se informira o nekom specijalnijem mjestu tabele, neka pogleda prve riječi alineje koja sadrži to mjesto, pa zatim neka potraži onaj članak u leksikonu koji ima kao naslov te prve riječi. Na primjer, preporuka *»Vrati se na definicije!«* sadržana je u onoj alineji tabele kojoj je prva rečenica: MOŽEŠ LI ZADATAK DRUGAČIJE IZRAZITI? U članku pod tim naslovom čitalac biva upućen na DEFINICIJU, i u tom članku (o definiciji) dotična se preporuka objašnjava i ilustrira.

2. Proces rješavanja zadataka kompleksan je proces, koji ima više različitih aspekata. Dvanaest glavnih članaka leksikona obrađuju opširno neke od tih aspekata. Navest ćemo naslove tih članaka.

Radimo li intenzivno, živo osjećamo napredak u svom radu; radosno smo uzbuđeni ako brzo napredujemo, a potišteni smo ako rad sporo odmiče. Što je bitno za NAPREDAK I DOSTIGNUĆE u rješavanju zadataka? Članak koji tretira ovo pitanje često se citira u ostalim dijelovima leksikona i treba ga prilično rano pročitati.

U nastojanju da riješimo neki zadatak naizmjence razmatramo različite aspekte toga zadatka, mi ga neprestano u svom mozgu prevrćemo. VARIJACIJA ZADATKA bitna je za naš rad. Svoj zadatak možemo varirati RASTAVLJANJEM I SASTAVLJANJEM njegovih elemenata, ili vraćanjem na DEFINICIJU nekih njegovih izraza, ili ćemo pak moći upotrijebiti velike pomoćne izvore, kao što su: GENERALIZACIJA, SPECIJALIZACIJA i ANALOGIJA. Variranje zadatka može nas dovesti do POMOĆNIH ELEMENATA ili do otkrića pristupačnijeg POMOĆNOG ZADATKA.

Treba da pomno razlikujemo dvije vrste zadataka, a to su ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI. Naša je tabela specijalno prilagođena »odredbenim zadacima«. Ako je želimo primijeniti i na »dokazne zadatke« moramo je revidirati i promijeniti neka njena pitanja i preporuke.

U svim vrstama zadataka, a naročito u matematičkim zadacima koji nisu previše jednostavni, zgodne OZNAKE i geometrijske SLIKE predstavljaju veliku, često neophodnu pomoć.

3. Proces rješavanja zadataka ima mnogo aspekata, no neke od njih o ovoj knjizi uopće ne razmatramo, a neke samo letimično. Mislim da je opravdano ako se u prvom kratkom prikazu izostave oni momenti koji bi se mogli činiti presuptilni, ili previše tehnički, ili previše polemički.

Privremeno, posve plauzibilno HEURISTIČKO MIŠLJENJE važno je u otkrivanju rješenja, ali ga ne smijemo uzimati kao gotov dokaz. Potrebno je da naslućuješ, ali ISPITAJ SVOJU SLUTNJU! Bit heurističkih izvoda iznijeta je u članku ZNAKOVI NAPRETKA, no to bi se izlaganje moglo i proširiti.

Razmatranje izvjesnih logičkih šablona važno je u našoj temi, ali se pokazalo zgodnim da se ne uvede nijedan tehnički članak. Samo su dva članka pretežno posvećena psihološkim aspektima. To su članci: ODLUČNOST, NADA, USPJEH i PODSVJESTAN RAD. Uzgredna je napomena o psihologiji životinja; vidi: RADITI NATRAŠKE.

Izričito valja naglasiti da u područje heuristike spadaju sve vrste zadataka, napose PRAKTIČNI ZADACI pa i ZAGONETKE. Također valja naglasiti da su PRAVILA OTKRIVANJA izvan okvira ozbiljnog istraživanja. Heuristika raspravlja o čovjekovu vladanju prema problemima, a toga je

bilo od početka ljudskog društva, i čini se da je kvintesenciju davnih diskusija sačuvala MUDROST U POSLOVICAMA.

4. U našem prikazu nalaze se i neki članci o posebnim pitanjima, kao i neki članci o općenitijim aspektima, jer bi mogli, u cjelini ili djelomice, specijalno interesirati učenike ili nastavnike.

Neki članci obrađuju izvjesna metodska pitanja koja su često važna u elementarnoj matematici, kao: PAPUS, RADITI NATRAŠKE (već citirano pod 3), REDUCTIO AD ABSURDUM I INDIREKTAN DOKAZ, INDUKCIJA I POTPUNA INDUKCIJA, POSTAVLJANJE JEDNADŽBI, PROVJERAVANJE RAZMATRANJEM DIMENZIJA i ČEMU DOKAZI? Nekoliko članaka obraća se posebno nastavnicima: ŠABLONSKI ZADACI i DIJAGNOZA, a neki drugi članci obraćaju se pak posebno učenicima koji su više nego prosječno radoznali: INTELIGENTAN RJEŠAVAČ ZADATAKA, INTELIGENTAN ČITALAC i BUDUĆI MATEMATIČAR.

Spomenimo na ovom mjestu još i to da dijalozi između nastavnika i učenika, opisani su §§ **8, 10, 18, 19, 20**, i u raznim člancima leksikona, mogu poslužiti kao uzorak ne samo nastavniku koji nastoji voditi svoj razred već i svakom onom tko posve samostalno rješava probleme. Opisati razmišljanje kao »unutarnju raspravu«, kao svojevrstan razgovor čovjeka koji razmišlja sa samim sobom — nije neumjesno. U dotičnim dijalozima prikazano je napredovanje u rješavanju; rješavač zadataka koji razgovara sam sa sobom napredovat će na sličan način.

5. Ne iscrpljujući ovdje sve preostale naslove, spomenut ćemo ipak još neke grupe.

Neki članci sadrže napomene o povijesti naše teme: DESCARTES, LEIBNIZ, BOLZANO, HEURISTIKA, zatim TERMINI, STARI I NOVI, te PAPUS (posljednje je već citirano pod 4).

Nekoliko članaka objašnjava tehničke izraze: UVJET, KOROLAR, LEMA.

U nekoliko članaka nalazimo samo upućivanja na druge članke. (Takvi su članci u sadržaju obilježeni zvjezdicom.)

6. Heuristika je usmjerena na općenitu valjanost, na studij postupaka koji su neovisni o temi i mogu se upotrijebiti kod svih vrsta zadataka. Međutim, u ovom prikazu navodimo kao primjere gotovo isključivo elementarne matematičke zadatke. Svakako valja imati na umu da je to ograničenje, ali se možemo nadati da takvo ograničenje ozbiljno ne krnji tendenciju naših razmatranja. U stvari, elementarni matematički zadaci potpuno daju željenu raznovrsnost, a studiranje njihovih rješenja osobito je pristupačno i interesantno. Osim toga, ni nematematički zadaci nisu potpuno zaboravljeni, iako su kao primjeri navedeni znatno rjeđe. Zadaci iz više matematike nisu nigdje navedeni direktno, no oni tvore realnu pozadinu ovog prikaza. Iskusan matematičar koji se zanima za ovu vrstu studija lako će dodati primjere iz vlastitog iskustva i na njima dalje razbistrivati momente koji su ovdje ilustrirani elementarnim primjerima.

7. Autor ove knjige rado bi zahvalio nekim suvremenim autorima koji nisu spomenuti u članku HEURISTIKA, a prema kojima se on osjeća obavezan. To su: fizičar i filozof Ernst Mach, matematičar Jacques Hadamard [Žak Adamar], psiholozi William James [Viljem Džejms] i Wolfgang Köhler. Želio bi da budu imenovani još i psiholog K. Duncker [K. Danker] i matematičar F. Krauss, u čijem djelu ima izvjesnih paralelnih napomena. (Pojavilo se nakon što su vlastita istraživanja autorova već bila prilično uznapredovala i djelomice publicirana.)

Šablonski zadatak je naziv koji bi se mogao dati npr. zadatku »riješiti jednadžbu $x^2 - 3x + 2 = 0$« ako se rješavanje opće kvadratne jednadžbe već prije izložilo i rastumačilo, tako da učenik ne treba ništa drugo, već da brojeve -3 i 2 uvrsti umjesto izvjesnih slova koja se pojavljuju u općoj formuli. Pa čak i onda ako kvadratna jednadžba nije još općenito riješena »sa slovima«, ali je već prije riješeno pola tuceta sličnih kvadratnih jednadžbi s numeričkim koeficijentima, zadatak bismo morali nazvati »šablonskim«. Općenito, neki je zadatak šablonski ako se može riješiti bilo supstituiranjem specijalnih podataka u jedan općenit zadatak koji je ranije riješen, bilo tako da se — bez trunke originalnosti —

ide stopama nekog otrcanog uzorka. Postavljajući šablonski zadatak, nastavnik tura učeniku pod nos neposredan i određen odgovor na pitanje: *Znaš li neki srodni zadatak?* Učeniku je tada dovoljno samo nešto pažnje i strpljenja u radu po gotovom receptu. On nema prilike da upotrijebi svoje sposobnosti prosuđivanja i pronalaženja.

Šablonski zadaci, pa i mnogo njih, mogu biti potrebni u nastavi matematike, ali je neoprostivo ako se učenik ne navodi da radi i druge vrste zadataka. Poučavati mehaničko izvršavanje šablonskih matematičkih operacija i ništa više ne doseže niti nivo »kuharice«, jer kuhinjski recepti ostavljaju ipak nešto i kuharovoj fantaziji, a matematički recepti niti to.

Što je nepoznato? Što se traži? Što želiš naći? Za čim zapravo težiš?

Što je zadano? Koji su dani elementi?

Kako glasi uvjet? Koji uvjet povezuje nepoznanicu sa zadanim podacima?

Ova će pitanja postavljati nastavnik da bi provjerio razumijevanje zadatka. Učenik treba da na njih umije jasno odgovoriti. Osim toga, ova pitanja usmjeruju učenikovu pažnju na glavne dijelove »odredbenog zadatka«: nepoznanicu, zadane podatke i uvjet. Budući da će neprestano postojati potreba za razmatranjem ovih dijelova, ova će se pitanja često ponavljati u kasnijim fazama rješavanja. (Primjeri u §§ **8, 10, 18, 20,** zatim u člancima: POSTAVLJANJE JEDNADŽBI, 3, 4, PRAKTIČNI ZADACI, 1, ZAGONETKE i drugdje.)

Ta su pitanja vanredno važna za rješavača zadataka. On kontrolira svoje razumijevanje zadatka, koncentrira svoju pažnju na ovaj ili onaj dio zadatka. Bit rješenja jest u tome da se nepoznanica poveže sa zadanim podacima. Stoga rješavač zadatka mora uvijek iznova uočavati te dijelove pitajući: *Što je nepoznato? Što je zadano?*

Zadatak može imati više nepoznanica, a uvjet se može sastojati od nekoliko raznih dijelova. Trebat će možda razmatrati pojedine nepoznanice odnosno dijelove uvjeta odvojeno, ili pak može biti poželjno da se neki zadani podatak izdvoji i tako razmotri. Stoga će biti potrebne razne modifikacije naših pitanja, kao: Što su nepoznanice? Koji je prvi podatak? Koji je drugi podatak? Koji su razni dijelovi uvjeta? Kako glasi prva klauzula uvjeta?

Glavni dijelovi »dokaznog zadatka« jesu: pretpostavka i tvrdnja, a odgovarajuća su pitanja: *Što je pretpostavka? Što je tvrdnja?* Možda će nam zatrebati neka varijacija u verbalnom izražavanju ili neka modifikacija ovih čestih pitanja, na primjer: Što je hipoteza? Koji su razni dijelovi tvoje hipoteze? (Primjer u § **19.**)

Termini, stari i novi, koji opisuju aktivnosti u rješavanju zadataka često su višeznačni. Sam rad svakom je dobro poznat i često se o njemu raspravlja, ali ga — kao i drugi umni rad — teško možemo opisati. Budući da nije bio sistematski proučavan, nema tehničkih termina koji bi ga opisivali. Izvjesni polutehnički termini često zbrku samo povećavaju jer ih razni autori upotrebljavaju u raznim značenjima.

U idućem kratkom pregledu navedeni su neki novi termini upotrebljavani u ovoj knjizi, neki stari termini koji se ovdje izbjegavaju, ali i neki stari termini koji su zadržani usprkos njihovoj višeznačnosti.

Da iduća terminološka diskusija čitaoca ne smete, potrebno je da se ona čvrsto oslanja na primjere.

1. *Analiza.* PAPUS ju je lijepo definirao. To je upotrebljiv termin, koji opisuje jedan tipičan način stvaranja plana: polazak od nepoznanice (odnosno od zaključne tvrdnje) i rad natraške sve do zadanih podataka (odnosno do pretpostavke). Nesrećom, ta je riječ poprimila veoma različita značenja (npr. analiza kao dio matematike, kemijska analiza, logička analiza), pa je stoga u ovoj knjizi na žalost moramo izbjegavati.

2. *Uvjet* povezuje nepoznanicu »odredbenog zadatka« sa zadanim podacima. Vidi: ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI, 3. U tom značenju ovo je jasan, upotrebljiv i neizbježiv termin. Često je potrebno da se uvjet rastavi na više dijelova [dijelovi (I) i (II) u primjerima članka RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE, 7, 8]. No, obično i svaki dio danog uvjeta također nazivamo uvjetom. Ovoj dvosmislenosti, koja katkad može zbuniti, mogli bismo lako izbjeći uvođenjem

nekog tehničkog termina koji bi označavao dijelove čitava uvjeta. Takav dio mogli bismo, na primjer, zvati: »klauzula« uvjeta.

3. *Pretpostavka (hipoteza)* je naziv za bitan dio matematičkog teorema običnije vrste. (Vidi: ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI, 4.) Termin je u ovom svom značenju potpuno jasan i zadovoljava. Teškoća je u tome što se svaki dio pretpostavke također zove pretpostavka — tako da se jedna pretpostavka može sastojati od više pretpostavki. Izlaz bi iz neprilike bio, na primjer, kad bi se svaki pojedini dio čitave pretpostavke nazvao »klauzula« pretpostavke ili nekako slično. (Usporedi prethodnu napomenu za »uvjet«.)

4. *Glavni dijelovi* zadatka opisani su u članku: ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI, 3, 4.

5. *Odredbeni zadatak, dokazni zadatak* novi su termini, koji su na žalost morali biti uvedeni umjesto historijskih termina jer se značenje ovih potonjih svakodnevnom, tekućom upotrebom nepopravljivo pobrkalo. U latinskim prijevodima grčkih matematičkih tekstova zajednički naziv za obje vrste zadataka jest »propositio«. »Odredbeni zadatak« zvao se »problema«, a »dokazni zadatak« »theorema«. U starinskom matematičkom jeziku riječi: propozicija, problem, teorem imaju još ovo »euklidsko« značenje, no u modernom matematičkom jeziku ovo se potpuno promijenilo. To opravdava uvođenje novih termina.

6. *Progresivno zaključivanje (metoda).* Razni autori upotrebljavaju ovaj termin u raznom značenju. Neki ga upotrebljavaju u starom značenju »sinteze« (vidi pod 9). Upotreba u tom smislu može se obraniti, no mi ćemo ovdje izbjegavati ovaj termin.

7. *Regresivno zaključivanje (metoda).* Neki autori upotrebljavaju ovaj termin u starom značenju »analize« (usporedi 1, 6). Izraz je moguće obraniti, no ovdje ga izbjegavamo.

8. *Rješenje.* Potpuno jasan termin ako se uzme u svome čisto matematičkom značenju. Ovaj nam izraz tada označuje svaki objekt koji udovoljava uvjetu »odredbenog zadatka«. Na primjer, rješenja jednadžbe $x^2 - 3x + 2 = 0$ jesu njeni korijeni, brojevi 1 i 2. Nesrećom, ova riječ ima i druga

značenja, koja nisu čisto matematička, a matematičari ih upotrebljavaju pored njezinog matematičkog značenja. Izraz »rješenje« upotrebljavamo i u smislu »proces rješavanja«, »rješavanje«, »rad izvršen pri rješavanju« (na primjer kad govorimo o »teškom rješenju«). »Rješenje« može značiti i uspjeh rada izvršenog pri rješavanju zadatka. (Ovaj smisao imamo kad govorimo, na primjer, o »lijepom rješenju«, »elegantnom rješenju«.) Može se desiti da u istoj rečenici moramo govoriti o objektu koji udovoljava uvjetu zadatka, o radu koji je potreban da taj objekt dobijemo, i o uspjehu tog rada. Damo li se tada zavesti, pa sva tri puta upotrijebimo izraz »rješenje«, rečenica neće ispasti previše jasna.

9. *Sinteza.* PAPUS upotrebljava ovaj izraz u vrlo određenom značenju, koje bi zavređivalo da ga zadržimo. Na žalost, termin moramo ovdje izbjegavati. Razlozi su isti kao i kod »protu«-termina »analiza« (vidi pod 1).

Tradicionalni profesor matematike, kakva ga znaju prikazivati, rastresen je. U javnosti se obično pojavljuje s po jednim izgubljenim kišobranom u svakoj ruci. Evo ga u učionici, licem obrenuta ploči, a leđima razredu. On piše *a*, govori *b*, misli *c*, a ispravno je *d*. Neke njegove izreke prenose se od generacije na generaciju.

»Da riješiš ovu diferencijalnu jednadžbu, gledaj je tako dugo dok ti rješenje ne padne na um!«

»Ovaj je princip tako savršeno općenit da nije moguća nikakva njegova posebna primjena.«

»Geometrija je umijeće ispravnog zaključivanja na pogrešnim slikama.«

»Moja metoda svladavanja teškoće sastoji se u tome da je zaobiđem.«

»Koja je razlika između metode i trika? Metoda je trik, dvaput upotrijebljen.«

Sve u svemu, od tog tradicionalnog profesora matematike može se nešto naučiti. Nadajmo se da nastavnik matematike od kojeg se ništa ne može naučiti, neće postati tradicionalan.

Uvjet je jedan od glavnih dijelova »odredbenog zadatka«. Vidi: ODREDBENI ZADACI I DOKAZNI ZADACI, 3, zatim TERMINI, STARI I NOVI.

Za uvjet kažemo da je *preodređen* ako sadrži suvišne dijelove. Nazivamo ga *kontradiktornim* ako su mu dijelovi međusobno oprečni i protuslovni tako da nema objekta koji bi udovoljavao uvjetu.

Ako je neki uvjet izražen s više linearnih jednadžbi nego što u njima ima nepoznanica, on je ili preodređen ili kontradiktoran. Ako je uvjet izražen s manje jednadžbi nego što je u njima nepoznanica, on nije dovoljan za određivanje nepoznanice. Ako je pak uvjet izražen s upravo toliko jednadžbi koliko u njima ima nepoznanica, tada je on općenito upravo dovoljan za određivanje nepoznanice, ali u izuzetnim slučajevima može ipak biti kontradiktoran ili nedovoljan.

Varijacija zadatka. Kukac (spomenut i na drugom mjestu) nastoji pobjeći kroz prozorsko staklo. Neprestano ponavlja svoj beznadni pothvat, a ne pokuša kroz susjedni prozor koji je otvoren i kroz koji je uletio u sobu. Miš će raditi pametnije. Ako upadne u mišolovku, pokušat će da se provuče između dvije šipke, zatim između dvije susjedne, itd., on varira svoje pokušaje, istražuje razne mogućnosti. Čovjek je sposoban, ili bi bar morao biti sposoban da svoje pokušaje varira još inteligentnije, da razboritije istražuje razne mogućnosti, da uči iz svojih pogrešaka i propusta. »Try, try again« kaže se u nekom engleskom dječjem stihu. To je dobar savjet. Kukac, miš i čovjek slušaju ga; ali ako ga jedan sluša s više uspjeha nego drugi, to je zato što *svoj zadatak varira* pametnije.

1. Na kraju svog rada — kad smo dobili rješenje — koncepcija našeg zadatka bit će mnogo potpunija i adekvatnija nego što je bila u početku. U nastojanju da od svoje početne koncepcije zadatka dođemo do adekvatnije, podesnije, kušamo razna stanovišta i razmatramo zadatak s raznih strana.

Uspjeh u rješavanju zadatka ovisi o izboru pravilnog aspekta, ovisi o tome da li smo tvrđavu napali s njene najpristupačnije strane. Da bismo pronašli koji je aspekt pravilan, koja je strana pristupačna, iskušavamo razne strane i aspekte, *variramo zadatak*.

2. Varijacija zadatka od bitne je važnosti. Ova se činjenica može objasniti na razne načine. Tako se, s izvjesnog gledišta, napredak u rješavanju zadatka pojavljuje kao mobilizacija i organizacija ranije stečenog znanja. Moramo izvući izvjesne elemente iz svojeg pamćenja i ugraditi ih u zadatak. Varijacija zadatka pomaže nam u tom izvlačenju. Kako?

Mi se neke stvari podsjećamo pomoću nekakva »kontaktnog djelovanja« nazvanog »asocijacija misli«; ovo što nam je sad u svijesti nastoji da dozove ono što se s tim dodirivalo u nekoj drugoj prilici. (Ovdje nema ni mjesta, a ni potrebe da se pomnije formulira teorija asocijacije, ili da se raspravlja o njenim granicama.) Ako *zadatak variramo*, unosimo nova gledišta i tako stvaramo nove kontakte, nove mogućnosti za povezivanje onih elemenata koji su bitni za naš zadatak.

3. Ne možemo očekivati da ćemo neki zadatak koji je vrijedan truda riješiti bez napete koncentracije. Međutim, napetom koncentracijom svoje pažnje na istu tačku lako se umaramo. Da bismo svoju pažnju održali budnom, moramo neprestano mijenjati predmet na koji je ona upravljena.

Napreduje li naš posao, tada ima što da se radi, postoje nova gledišta koja valja ispitati, naša je pažnja tada zaposlena, a interes živ. No, ako nam ne uspijeva da napredujemo, naša pažnja koleba, interes blijedi, zadatak nas počinje umarati, misli nam počinju lutati, i postoji opasnost da zadatak potpuno promašimo. Da bismo izbjegli tu opasnost, moramo *postaviti neko novo pitanje* o zadatku.

Novo pitanje otvorit će nove mogućnosti dodira s našim ranijim znanjem, oživjet će naše nade u uspostavljanje takvih korisnih dodira. Novo pitanje *osvaja ponovo naš interes varirajući zadatak*, pokazujući neki njegov novi aspekt.

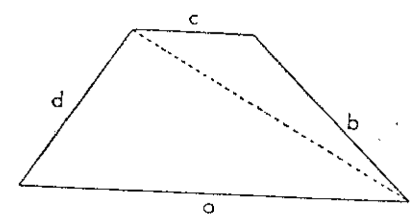
4. *Primjer.* Odredi volumen kvadratne krnje piramide ako su osnovni bridovi a, b i visina v!

Zadatak se može postaviti razredu koji zna formule za volumen prizme i piramide. Ako se učenici ne jave s nekim vlastitim mislima, nastavnik može početi s tim da *varira zadane podatke.* Polazimo od krnje piramide kojoj je $a > b$. Što se dešava ako brid b raste, sve dok ne postane jednak bridu a? Krnja piramida postaje prizma, a traženi volumen

prelazi u $a^2 v$. Što se dešava ako se brid b smanjuje, sve dok ne postane jednak nuli? Iz krnje piramide postaje piramida, a traženi volumen prelazi u $a^2 v/3$.

Ovo variranje podataka pridonosi prije svega tome da se održi interes. Nadalje, ono sugerira da se — na ovaj ili onaj način — upotrijebe navedeni rezultati o prizmi i piramidi. A u svakom slučaju našli smo neka određena svojstva konačnog rezultata; konačna formula mora biti takva da za $b = a$, prelazi u $a^2 v$, a za $b = 0$ prelazi u $a^2 v/3$. Korisno je predvidjeti svojstva traženog rezultata. Iz takvih svojstava mogu poteći vrijedni poticaji, a u svakom slučaju, kad nađemo konačnu formulu, možemo tu formulu provjeriti. Prema tome, imamo unaprijed odgovor na pitanje: MOŽEŠ LI KONTROLIRATI REZULTAT? (Vidi dotični članak, pod 2.)

5. *Primjer.* Konstruiraj trapez ako su mu zadane sve četiri stranice a, b, c, d!



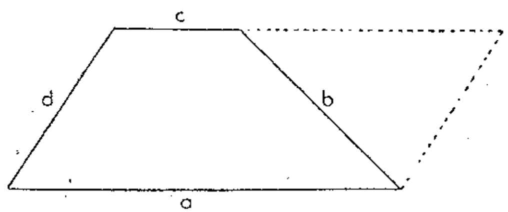
Sl. 29.

Neka je a donja baza, c gornja baza. Baze a, c su paralelne i nejednake. Krakovi b, d nisu paralelni. Nemamo li nikakve druge ideje, započet ćemo variranjem zadanih podataka.

Polazimo od trapeza kome je $a > c$. Što se dešava ako se baza c umanjuje, sve dok ne postane jednaka nuli? Trapez degenerira u trokut. A trokut je, kako znamo, jednostavan lik, koji možemo konstruirati iz raznih zadanih elemenata. Moglo bi možda biti od neke koristi kad bismo taj trokut uveli u sliku. To ćemo učiniti tako da povučemo pomoćnu crtu, dijagonalu trapeza (sl. 29). No ako razmotrimo taj trokut, pronaći ćemo da nam on jedva može pomoći, mi znamo dvije stranice: a i d, a morala bi biti zadana tri elementa.

Pokušat ćemo nešto drugo. Što se dešava ako baza c raste, dok ne postane jednaka bazi a? Trapez postaje paralelogram. Možemo li to upotrijebiti? Malo ispitivanje (vidi sl. 30) skreće nam pažnju na trokut koji smo — crtajući paralelogram — dodali originalnom trapezu. Taj se trokut lako može konstruirati; mi znamo tri zadana elementa, tri njegove stranice b, d i $a - c$.

Varirajući prvobitni zadatak (konstrukcija trapeza), došli smo bili do pristupačnijeg pomoćnog zadatka (konstrukcija trokuta). Upotrijebivši rezultat pomoćnog zadatka, riješili smo lako svoj prvobitni zadatak (upotpunjavajući trokut na paralelogram).



Sl. 30.

Naš je primjer tipičan. Tipično je i to da naš prvi pokušaj nije uspio. Ipak, osvrnemo li se na nj, možemo razabrati da on i nije bio baš tako beskoristan. Sadržavao je jednu ideju, a napose nam je pružio priliku da pomislimo na konstrukciju trokuta kao na sredstvo za postizavanje cilja. Doista, mi smo do drugog, uspješnog pokušaja došli modificiranjem prvog, bezuspješnog. Varirali smo c; najprije smo ga smanjili, a zatim povećali.

6. Često nam valja istražiti razne modifikacije zadatka, kao u prethodnom primjeru. Moramo zadatak varirati, drugačije formulirati i neprestano ga preinačivati, dok nam najzad ne uspije da nađemo nešto korisno. I iz neuspjeha možemo učiti, i u neuspjelom pokušaju može se skrivati neka

dobra ideja. *Modificirajući* neuspio pokušaj, možemo doći do uspješnog. Nakon raznih pokušaja često dolazimo do pristupačnijeg pomoćnog zadatka, kao u prethodnom primjeru.

7. Postoje izvjesni oblici variranja zadatka koji nam mogu pomoći na tipičan način: vraćanje na DEFINICIJU, RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE, uvođenje POMOĆNIH ELEMENATA, GENERALIZACIJA, SPECIJALIZACIJA I upotreba ANALOGIJE.

8. Ono što smo prije (pod 3) rekli o novim pitanjima, koja mogu ponovo osvojiti naš interes, važno je za pravilnu upotrebu naše tabele.

Nastavnik će se služiti tabelom kad hoće pomoći svojim učenicima. Ako učenik napreduje, nije mu potrebna pomoć, i nastavnik ne treba da mu više postavlja nikakva pitanja, već treba da ga pusti da radi sam (što je svakako bolje za razvoj njegove samostalnosti). No, dakako, ako učenik zapne, nastavnik treba da nastoji da nađe neko zgodno pitanje ili preporuku kako bi mu pomogao. Inače postoji opasnost da zadatak učeniku dojadi, pa ga učenik ostavi, ili da izgubi interes pa u krajnjoj ravnodušnosti počini kakvu glupu pogrešku.

Tabelu možemo upotrijebiti i onda kad rješavamo svoje zadatke. Da bismo je pravilno upotrijebili, moramo postupati kao i u netom spomenutom slučaju. Ako naš napredak zadovoljava, ako se nove misli pojavljuju spontano, bilo bi naprosto glupo kad bismo svoj spontani napredak ometali stranim, nebitnim pitanjima. Međutim, ako smo u svom napredovanju zapeli, ako nam ništa zgodno ne pada na um, tada postoji opasnost da nam zadatak dojadi. Tada je vrijeme da mislimo na neku opću ideju koja bi mogla pomoći, na neko prikladno pitanje ili preporuku tabele. A dobro je došlo svako pitanje koje ima izgleda da otkrije neki nov aspekt zadatka; takvo nam pitanje vraća interes, podržava nas u radu i razmišljnju.

Zagonetke. Prema § 3. pitanja i preporuke naše tabele nisu vezana na neko određeno područje, već se mogu primijeniti na sve vrste problema. Vrlo je interesantno provjeriti tu tvrdnju na zagonetkama.

Evo, na primjer, jedne »zagonetne posjetnice«:

MIRKO A. STIPANČIĆ

Što je po zanimanju vlasnik ove posjetnice? Zadatak je: naći anagram slova s posjetnice, tj. premještanjem tih slova dobiti naziv zanimanja. Zanimljivo je da će se u rješavanju ove zagonetke pojedina pitanja naše tabele pokazati kao umjesna i stimulativna.

Što je nepoznato? Jedan naziv.

Što je zadano? Petnaest slova na posjetnici: MIRKO A. STIPANČIĆ.

Kako glasi uvjet? Traženi naziv ima petnaest slova, i to upravo petnaest zadanih slova u jednom redoslijedu, koji tek valja odrediti. Nadalje, naziv treba da znači neko zanimanje.

Zadrži samo jedan dio uvjeta, a odbaci drugi dio! Nabrajat ćemo razna zanimanja (udovoljavajući drugom dijelu uvjeta) i ispitivati ne nailazimo li možda na anagram zadanih slova (udovoljavajući na taj način i prvom uvjetu). Kakvih zanimanja ima? Radnik, obrtnik, krojač, postolar, liječnik, učitelj, profesor, oficir — ništa ne valja, prekratko je. Ima i duljih riječi: strojobravar, soboslikar, kovinotokar, zemljoradnik. A možda se naziv sastoji od više riječi!?

Nacrtaj sliku! Vrlo je korisno označiti petnaest praznih polja:

Možeš li zadatak drugačije izraziti? Treba da nađemo naziv zanimanja koji u nekom određenom redoslijedu sadrži slova:

A A I I I O Č Č K M N P R S T

To je sigurno ekvivalentna preformulacija zadatka. (Vidi: POMOĆNI ZADATAK, 6.) Ona bi mogla koristiti. Rastavlja-

njem vokala od konsonanata (to je bitno, a ne abecedni poredak) dolazimo do novog aspekta zadatka. Sada vidimo da traženi naziv ima šest slogova, ukoliko R ne zapadne među vokale.

Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak! Srodan zadatak jest: sastavljati riječi koje sadrže jedan dio zadanih slova. Takve kratke riječi sastavljat ćemo zacijelo lako. Zatim ćemo pokušati da pronalazimo sve dulje takve riječi. Što više slova upotrijebimo, to smo bliže traženom nazivu.

Možeš li riješiti dio zadatka? Traženi naziv je toliko dug da se vjerojatno sastoji od raznih dijelova. Bit će da je složenica ili pak naziv od više riječi. Možda je nekoj drugoj riječi dodan neki uobičajeni nastavak. Koji bi to ovdje mogao biti?

— — — — — — — — — — — — N I K
— — — — — — — — — — — — Č A R
— — — — — — — — — — — I Č A R

Pitanja i preporuke naše tabele ne mogu činiti čudesa. Ne mogu nam dati rješenja svih mogućih zagonetaka bez ikakva našeg napora. Ako čitalac želi naći traženi naziv, mora i dalje pokušavati i razmišljati. Pitanja i preporuke tabele mogu ga u tom podržavati. Ako postajemo malodušni što nema uspjeha i skloni da zbog toga zadatak ostavimo, pitanja i preporuke mogu nas potaknuti na neki nov pokušaj, mogu nam dati neki nov aspekt, novu varijaciju zadatka, nov stimulans. Ona će nas podržati u mišljenju.

Daljnji primjer u članku RASTAVLJANJE I SASTAVLJANJE, 8.

Znakovi napretka. Kolombo i njegovi pratioci, jedreći na zapad preko nepoznatog oceana, razveselili su se kada su god vidjeli ptice. Smatrali su da je ptica povoljan znak, koji ukazuje na blizinu kopna. No, u tom su se često razočarali. Vrebali su i druge znakove. Mislili su da alge na vodi i niske gomile oblaka možda najavljuju kopno. Ponovo su se razočarali. Međutim, jednoga dana znakovi su se umnožili. U četvrtak, 11. listopada 1492, »vidjeli su u blizini broda ptice prutke i zeleni šaš. Oni s karavele *Pinta* vidjeli su trsku i kolac, a uhvatili su i drugi mali kolac, koji kao da je bio obrađivan pomoću željeza; zatim opet komadić trske, pa jednu kopnenu biljku i daščicu. Posada karavele *Niña* vidjela je također znakove da je kopno blizu i našla je grančicu s bobicama. Svi su odahnuli i radovali se ovim znakovima.« I zaista: idućeg dana ugledali su kopno, prvi otok Novoga svijeta.

Bio naš pothvat važan ili ne, bio naš zadatak ma koje vrste, ako intenzivno radimo, gorljivo iščekujemo znakove napretka, kao što su Kolombo i njegovi drugovi iščekivali znakova blizoga kopna. Razmotrit ćemo neke primjere kako bismo shvatili što se s pravom može smatrati znakom da se približavamo rješenju.

1. *Primjeri.* Preda mnom je šahovski problem. Treba matirati crnoga kralja u, recimo, dva poteza. Na šahovskoj ploči nalazi se i bijeli skakač, prilično daleko od crnoga kralja, tako da izgleda suvišan. Zašto je tu? Prisiljen sam da u početku ostavim to pitanje bez odgovora. No, nakon raznih pokušaja nailazim na jedan nov potez i vidim da pri tom mogu dobro upotrijebiti bijelog skakača, koji je prividno bio suvišan. Ovo zapažanje daje mi nove nade. Smatram ga povoljnim znakom: novi potez ima izgleda da bude onaj pravi. Zašto?

U pravilno konstruiranom šahovskom problemu nema suvišnih figura. Stoga moramo uzeti u obzir sve figure na šahovskoj ploči; moramo *iskoristiti sve zadano.* Ispravno rješenje problema koristi se svakako svim figurama, pa i onim prividno suvišnim bijelim skakačem. U ovom posljednjem pogledu podudara se novi potez o kome razmišljam s ispravnim potezom koji se traži. Novi potez čini se kao ispravan, on bi mogao biti ispravan potez.

Interesantno je razmatrati sličnu situaciju u nekom matematičkom zadatku. Na primjer: izrazi površinu trokuta pomoću njegove tri stranice a, b, c! Uzmimo da sam već učinio nekakav plan. Znam — više-manje jasno — koje geometrijske veze treba da upotrijebim i kakve račune moram provesti.

Međutim, nisam posve siguran da li je moj plan provediv. Ako — idući linijom koju propisuje moj plan — opazim da u izraz za površinu što ga namjeravam sagraditi ulazi veličina

$$\sqrt{b+c-a},$$

tada imam valjan razlog da budem zadovoljan. Zašto?

Treba uzeti u obzir da je suma ma kojih dviju stranica trokuta veća od treće stranice. Tu imamo izvjesno ograničenje. Zadane dužine a, b, c ne mogu se uzeti sasvim po volji; na primjer $b + c$ mora biti veća od a. To je bitni dio uvjeta, a mi moramo *iskoristiti čitav uvjet.* Ako $b + c$ nije veće od a, tražena formula bit će nužno iluzorna. Gornji pak kvadratni korijen postaje imaginaran ako je $b + c - a$ negativno, tj. ako je $b + c$ manje od a, pa na taj način kvadratni korijen prikazuje nerealnu veličinu upravo u onim istim okolnostima u kojima traženi izraz postaje nužno iluzoran. Prema tome, moja formula u koju ulazi taj kvadratni korijen ima važno svojstvo zajedničko s ispravnom formulom za površinu trokuta. Moja formula čini se kao ispravna formula, ona bi mogla biti ispravna.

Evo još jedan primjer. Prije nekog vremena htio sam dokazati jedan stereometrijski teorem. Bez mnogo muke započeo sam, i čini se, dobro, a tada sam zapeo. Nešto je nedostajalo da se dokaz završi. Kad sam onog dana prestao raditi, shvaćao sam mnogo jasnije nego u početku kako bi trebalo da izgleda dokaz, kako bi trebalo ispuniti prazninu; no još je nisam umio ispuniti. Idućeg dana, nakon dobrog noćnog odmora, ponovo sam razmotrio pitanje i odmah mi je pao na um jedan analogan teorem iz planimetrije. U tren oka bio sam uvjeren da sam blizu rješenja i imao sam — mislim — i dobar razlog da budem uvjeren. Zašto?

Analogija je važan vodič. Rješenje stereometrijskog zadatka ovisi često o analognom planimetrijskom zadatku (vidi: ANALOGIJA, 3—7). U mom je slučaju, dakle, od početka postojao izgled da bi traženi dokaz mogao kao lemu upotrijebiti neki planimetrijski teorem, kakav mi je zaista i pao na um. »Ovaj teorem izgleda kao lema koja mi je potrebna;

mogao bi biti lema koja mi je potrebna« — tako sam rasuđivao.

Da su se Kolombo i njegovi ljudi potrudili i zaključivali eksplicitno, oni bi zaključivali na sličan način. Oni su znali kako izgleda more u blizini obale. Oni su znali da — češće nego na otvorenom moru — u zraku ima ptica koje dolaze s kopna i da u vodi plivaju predmeti otrgnuti od obale. Mnogi od tih ljudi zacijelo su opazili takvo što kad su se s prijašnjih putovanja vraćali u domaće luke. Uoči onog znamenitog dana (kad su ugledali otok San Salvador) kad su predmeti koji su plivali bili sve mnogobrojniji oni su mislili: »Izgleda tako kao da se približavamo nekom kopnu; bit će da se sad približavamo nekom kopnu« i »svi su odahnuli i radovali se ovim znakovima«.

2. *Heuristički karakter znakova napretka.* Istaknut ćemo jedan moment, koji je možda već svakom jasan, ali ga zbog njegove velike važnosti treba potpuno razjasniti.

Način zaključivanja, objašnjen prethodnim primjerima, zavređuje da ga uočimo i ozbiljno uzmemo u obzir, iako nam daje tek plauzibilno upozorenje, a nikako neku nepogrešivu sigurnost. Mi ćemo sad jedno takvo zaključivanje formulirati pedantno, naširoko, premda ponešto neprirodno detaljirano:

Ako se približavamo kopnu, vidimo često ptice.
Sad vidimo ptice.
Dakle se, vjerojatno, približavamo kopnu.

Bez riječi »vjerojatno« zaključak bi bio potpuno pogrešan. Stvarno su Kolombo i njegovi pratioci viđali ptice mnogo puta, ali su se kasnije razočarali. No, jednom je došao dan kada su vidjeli prutke, a za njim je došao dan otkrića.

Riječju »vjerojatno« zaključak je razborit i prirodan, ali nikako nije dokaz, demonstrativni zaključak; on je samo upozorenje, heuristički nagovještaj. Bilo bi vrlo pogrešno kad bismo zaboravili da je takav zaključak samo vjerojatan i smatrali ga sigurnim. Ali bi još veća pogreška bila kad se uopće ne bismo obazirali na takve zaključke. Prihvatimo li heuristički zaključak kao siguran, možemo se lako nasamariti i razočarati, no ako heurističke zaključke potpuno zanemarimo, nećemo uopće napredovati. Najvažniji znakovi napretka

su heuristički. Da li da im vjerujemo? Da li da ih slijedimo? Slijediti ih možemo, ali otvorenih očiju. Vjeruj, no pazi! I nikad se ne odreci vlastitog rasuđivanja!

3. *Jasno izrazivi znakovi.* Prethodne primjere možemo razmatrati i s drugog stajališta.

U prvom smo primjeru smatrali povoljnim znakom to što nam je uspjelo upotrijebiti zadani element koji prije nije bio upotrijebljen (bijeli skakač). Bili smo potpuno u pravu što smo tako mislili. Riješiti neki zadatak znači — u biti — to da se *nađe veza između zadanog i nepoznatog*. Osim toga, treba — bar u pravilno formuliranim zadacima — *iskoristiti sve zadano* i svaki zadani element povezati s nepoznanicom. Prema tome, sasvim je opravdano ako uvođenje daljnjeg zadanog elementa osjećamo kao napredak, kao korak naprijed.

U drugom smo primjeru smatrali povoljnim znakom to što je naša formula uzimala u obzir jednu bitnu klauzulu uvjeta. Bili smo potpuno u pravu što smo tako mislili. Treba *iskoristiti čitav uvjet*. Prema tome, uzimanje u obzir neke daljnje klauzule uvjeta s pravom smo osjetili kao napredak, kao pokret u pravom smjeru.

U trećem smo primjeru smatrali povoljnim znakom pojavljivanje jednostavnijeg analognog zadatka. I to je opravdano. Analogija je, zaista, jedno od najvažnijih sredstava za pronalaženje. Zakažu li druga sredstva, nastojat ćemo *smisliti analogni zadatak*. Ako se dakle takav zadatak pojavljuje spontano, sam od sebe, svakako da ćemo se radovati; osjećat ćemo da se približavamo k rješenju.

Pošto smo razmotrili ove primjere, lako ćemo shvatiti opću ideju. Postoje izvjesne misaone operacije koje tipično koriste u rješavanju zadataka. (Najuobičajenije takve operacije navedene su u našoj tabeli.) Uspije li neka takva tipična operacija (poveže li se s nepoznanicom neki daljnji zadani podatak — uzme li se u obzir neka daljnja klauzula uvjeta — uvede li se jednostavniji analogni zadatak), taj se uspjeh osjeća kao znak napretka. Ako smo shvatili ovaj bitni moment, moći ćemo razjasniti sebi i bit ostalih znakova napretka. Treba samo ići tabelom pa njena pitanja i preporuke razmatrati s novostečenoga gledišta.

Prema tome, jasno shvatiti bit nepoznanice — znači napredak. Jasno rasporediti razne podatke tako da se svakog možemo lako sjetiti — također znači napredak. Ako sebi živo predočimo uvjet kao cjelinu, bitno smo odmakli, a rastavljanje uvjeta na zgodne dijelove značit će važan korak naprijed. Nađemo li zornu sliku, ili oznaku koja se lako pamti, s pravom možemo smatrati da smo napredovali. Odlučan korak u pravom smjeru može biti to ako se sjetimo na neki *zadatak koji je srodan našem, a već je riješen.*

I tako dalje. Svakoj jasno zahvaćenoj misaonoj operaciji odgovara izvjestan jasno izraziv znak. Naša tabela, prikladno čitana, ujedno je i tabela znakova napretka.

Pitanja (i preporuke) naše tabele jednostavna su, očevidna i proizlaze iz običnog zdravog razuma. To je već više puta rečeno, a može se kazati i ovdje u vezi sa znakovima napretka. Da čitamo takve znakove, ne treba nam nikakvih »tajnih znanja«, već samo nešto zdravog razuma i, dakako, nešto iskustva.

4. *Manje jasno izrazivi znakovi.* Radeći intenzivno, imamo u sebi dosta oštro mjerilo za svoj napredak: ako je on brz, radosno smo uzbuđeni; ako je spor, potišteni smo. Takve razlike osjećamo posve jasno, a ipak ne možemo ukazati na neki određeni znak. Raspoloženja, osjećaji, opći aspekti situacije pokazuju naš napredak. Nije lako izraziti ih. »Čini mi se da je ovo dobro« ili »ovo izgleda loše« — kažu jednostavnije prirode. Iskusniji se izražavaju nijansiranije: »To je uravnotežen plan« ili »ne, ovdje nešto nedostaje, i to kvari harmoniju«. Ipak, iza ovih primitivnih ili neodređenih izraza krije se jasan osjećaj, koji s pouzdanjem slijedimo i koji nas često vodi pravim smjerom. Ako je takav osjećaj vrlo jak i ako se pojavljuje nenadano, govorimo o inspiraciji. Ljudi obično ne mogu posumnjati u svoju inspiraciju, i ona ih katkad prevari. I takve vodeće osjećaje i nadahnuća treba tretirati jednako kao i jasno izrazive znakove razmatrane ranije. Vjeruj, ali otvorenih očiju!

Slušaj svoje nadahnuće — ali sa zrncem sumnje!

[Što je bit tih vodećih osjećaja? Da li se iza takvih estetski nijansiranih riječi, kao što su »uravnotežen« i »harmoničan«, krije neko značenje koje je manje neodređeno? Bit će da su ova pitanja više spekulativna nego praktična, no naš kontekst ukazuje na odgovor, koji možda zavređuje da bude spomenut: budući da su jasnije izrazivi znakovi napretka povezani s uspjehom i neuspjehom izvjesnih, prilično određenih misaonih operacija, mogli bismo smatrati vjerojatnim da su naši, manje jasno izrazivi, vodeći osjećaji na sličan način povezani s drugim skrovitijim duhovnim aktivnostima — možda s aktivnostima kojih je priroda više »psihološka«, a manje »logička«.]

5. *Kako znakovi pomažu.* Imam plan. Vidim prilično jasno gdje treba da počnem i koje korake treba da učinim najprije. No, ne razabirem još potpuno kakvi su daljnji putovi; nisam još posve siguran da li je plan ostvariv; a u svakom slučaju preda mnom je još dug put. Stoga krećem oprezno u smjeru što mi ga je pokazao moj plan i pazim na znakove napretka. Ako su znakovi rijetki ili nejasni, počet ću oklijevati. A ako oni kroz dulje vrijeme uopće izostanu, ponestat će mi odvažnosti, okrenut ću se i pokušati drugim putem. Naprotiv, ako u toku mog napredovanja povoljni znakovi bivaju sve češći, ako se oni množe, nestaje mog oklijevanja, raspoloženje mi raste, i ja se krećem sa sve većim pouzdanjem, upravo kao Kolombo i njegovi drugovi neposredno prije nego su ugledali otok San Salvador.

Znakovi mogu upravljati našim akcijama. Njihova nas odsutnost može opomenuti na neku slijepu ulicu, prištedjeti nam vrijeme i uzaludan napor; njihova nam prisutnost može dati povoda da koncentriramo svoje snage na pravo mjesto.

No, znakovi mogu i varati. Jednom sam, zbog pomanjkanja znakova, napustio izvjestan put kojim sam bio krenuo, a netko tko je pošao kasnije i otišao tim putem malo dalje učinio je važno otkriće — što me je vrlo mučilo i dugo žalostilo. Ne samo da je bio izdržljiviji već je i pročitao izvjestan znak što sam ga ja bio previdio. Međutim, ja mogu i veselo ići nekim putem, ohrabren povoljnim znakovima, a srljati prema neočekivanoj, nesavladivoj zapreci.

Jest, u nekim pojedinim slučajevima znakvi nas mogu zavesti, ali nas u većini slučajeva vode dobro. Lovac će katkada pogrešno protumačiti trag svoje divljači, no u prosjeku on mora imati pravo; inače se ne bi čitavog života bavio lovom.

Da se pravilno protumače znakovi, potrebno je iskustvo. Neki od Kolombovih pratilaca zacijelo su znali iz svog iskustva kako izgleda more blizu obale, pa su tako mogli čitati znakove koji su im nametnuli misao da se približavaju kopnu. Vještak zna iz iskustva kako izgleda situacija, pa tako umije čitati znakove koji mu pokazuju približavanje rješenju. Vještak zna više znakova nego netko neiskusan, i pozna ih bolje; u tom je poznavanju glavna njegova prednost. Gdje neiskusan ne umije vidjeti ništa, iskusan lovac opaža tragove divljači pa joj čak i procjenjuje dob.

Glavna prednost izuzetnog talenta bit će da se sastoji u nekakvoj vanrednoj mentalnoj senzibilnosti. On istančano osjeća suptilne znakove napretka, odnosno opaža njihovu odsutnost, dok manje nadaren nije sposoban da opazi neku razliku.

[6. *Heuristički silogizam.* U bilješci 2. naišli smo na jedan oblik heurističkog zaključivanja koji zavređuje da ga još razmotrimo i da za nj potražimo tehnički izraz. Počet ćemo s tim da to zaključivanje formuliramo ovako:

Ako se približavamo kopnu, vidimo često ptice.
Sad vidimo ptice.

Dakle, postaje vjerojatnije da se približavamo kopnu.

Dvije izjave iznad horizontalne crte nazvat ćemo: *premise*, a izjavu ispod crte: *zaključak*. Čitav pak uzorak zaključivanja nazvat ćemo: *heuristički silogizam.*

Premise su ovdje formulirane jednako kao u bilješci 2, dok je zaključak izražen pažljivije. Bitna okolnost jače je naglašena. Kolombo i njegovi ljudi slutili su od početka da će — ploveći na zapad — najzad naići na kopno; u to su čak morali donekle biti i uvjereni, inače ne bi ni započeli svoje putovanje. U toku svog putovanja oni su svaki događaj — veći ili manji — dovodili u vezu s dominantnim pitanjem: »Približujemo li se kopnu?« Njihovo pouzdanje raslo je i padalo onako kako su se događaji javljali ili izostajali, a vjera

svakog pojedinca holebala je više ili manje, već prema temperamentu i karakteru. Svu dramatsku napetost putovanja valja pripisati takvim kolebanjima pouzdanja.

Navedeni heuristički silogizam razumno obrazlaže promjenu u stepenu pouzdanja. Bitna je uloga takva zaključivanja u tom da daje povoda za takvu promjenu, i taj je moment novom formulacijom bolje izražen nego u bilješci 2.

Naš prethodni primjer nameće nam općeniti obrazac, koji bismo mogli izraziti ovako:

Ako je A istinito, tada je istinito i B, kao što znamo.
Sad se pokazalo da je B istinito.

Dakle: A postaje vjerojatnije.

Ili kraće:

$$\begin{array}{l} \text{Ako } A, \text{ tada } B \\ B \text{ istinito} \\ \hline A \text{ vjerojatnije} \end{array}$$

U ovoj shematskoj formulaciji horizontalna crta stoji umjesto riječi »dakle« i izražava bitnu vezu između premisa i zaključka.]

[7. *Narav plauzibilnog zaključivanja.* U ovoj ćemo knjižici diskutirati o jednom filozofskom pitanju. Raspravit ćemo ga koliko je moguće praktičnije, bez formalnosti i daleko od »visokoučenog« načina izražavanja, no tema ipak ostaje filozofska. Ona se odnosi na narav heurističkog mišljenja i proteže se na jednu vrstu zaključivanja koje nije demonstrativno, ali je ipak važno, i koje ćemo, u pomanjkanju boljeg izraza, nazvati *plauzibilno* zaključivanje.

Znakovi koji uvjeravaju pronalazača u ispravnost njegove ideje; upozorenja koja nas vode u našim svakidašnjim poslovima; indicije pravnika; induktivan postupak učenjaka; statistička argumentacija kojom se služimo u mnogim, raznim slučajevima — sve se ove vrste dokaza podudaraju u dvije bitne tačke. Prvo, nemaju sigurnost strogog dokaza. Drugo, pomažu pri stjecanju bitno novog znanja, pa su čak i prijeko potrebni za svako znanje koje nije čisto matematičko ili logičko, za svako znanje koje se tiče fizičkog svijeta. Zaključivanje na kome se temelji takva vrsta dokaza mogli bismo nazvati »heurističko zaključivanje« ili »induktivno zaključivanje« ili (ako želimo izbjeći protezanje značenja postojećih termina) »plauzibilno zaključivanje«. Prihvatit ćemo ovdje posljednji termin.

Heuristički silogizam, uveden u prethodnom izlaganju, možemo smatrati najjednostavnijim i najraširenijim obrascem plauzibilnog zaključivanja. On nas podsjeća na jedan klasični obrazac demonstrativnog zaključivanja, na tzv. »modus tollens hipotetičkog silogizma«. Evo, jedan do drugog, oba obrasca:

Demonstrativno	*Heuristički*
Ako A, tada B	Ako A, tada B
B lažno	B istinito
A lažno	A vjerojatnije

Uspoređivanje ovih obrazaca bit će korisno. Ono nam može omogućiti uvid u narav plauzibilnog (heurističkog, induktivnog) zaključivanja, koji ne možemo drugdje dobiti tako lako.

Oba obrasca imaju istu prvu premisu:

Ako A, tada B

Razlikuju se u drugoj premisi. Izjave:

B lažno B istinito

međusobno su upravo oprečne, ali su »slične logičke naravi«, na istoj su »logičkoj razini«. Glavna razlika javlja se nakon premisa. Zaključci

A lažno A vjerojatnije

na raznim su logičkim razinama, i njihov odnos prema odgovarajućim premisama različite je logičke naravi.

Zaključak demonstrativnog silogizma iste je logičke naravi kao premise. Osim toga, taj je zaključak potpuno izražen i potkrijepljen premisama. Ako smo se moj susjed i ja složili u tome da prihvatimo premise, ne možemo se više razborito

prepirati o tom da li da prihvatimo i zaključak, ma koliko inače bili različiti naši ukusi i naša uvjerenja.

Zaključak heurističkog silogizma razlikuje se od premisa po svojoj logičkoj naravi; on je neodređeniji, manje oštar, nepotpunije izražen. Taj zaključak možemo usporediti sa silom, on ima smjer i veličinu. On nas gura u izvjesnom smjeru: A postaje *vjerojatnije*. Zaključak ima i izvjesnu jačinu: A može postati *mnogo* vjerojatnije, ili pak *samo malo* vjerojatnije. Zaključak nije premisama potpuno izražen ni potkrijepljen. *Premise izražavaju i izvode smjer, ali veličinu ne.* Za svakog razumnog čovjeka premise imaju za posljedicu da A postaje vjerojatnije (svakako ne: manje vjerojatno). Ipak, moj susjed i ja možemo se iskreno prepirati o tom *koliko* A postaje vjerojatnije jer se možemo razlikovati po svojim temperamentima i u svojim neformuliranim razlozima.

U demonstrativnom silogizmu premise tvore *potpunu bazu* na kojoj se temelji zaključak. Vrijede li obje premise, vrijedi i zaključak. Dobijemo li neku novu informaciju koja ne mijenja naše povjerenje u premise, ne može ona promijeniti naše povjerenje u zaključak.

U heurističkom silogizmu premise tvore samo *dio baze* na kojoj se temelji zaključak. One su dio koji je potpuno izražen, »vidljiv«. Postoji i neizrečen, nevidljiv dio, što ga sačinjava nešto drugo, možda nijemi osjećaji ili neformulirani razlozi. I zaista, može se dogoditi da dobijemo neku novu informaciju, koja ostavlja netaknutim naše povjerenje u obje premise, ali na nadu koju smo polagali u A utječe u smjeru koji je upravo suprotan smjeru izraženom u zaključku. Pronaći na osnovu premisa našeg heurističkog silogizma da je A plauzibilno — jedino je razumno. No sutra mogu naći razloge koji se uopće ne kose s tim premisama, a ipak čine A manje plauzibilnim ili ga pače jasno pobijaju. Zaključak se može poljuljati ili čak posve pasti uslijed potresa u nevidljivim dijelovima njegovih temelja, iako premise, vidljivi dio, stoje potpuno čvrsto.

Prethodne napomene kao da čine razumljivijom narav heurističkog, induktivnog i ostalog nedemonstrativnog plauzibilnog zaključivanja. Ta se zaključivanja pokazuju zakučasta i nezahvatljiva ako im se pristupa sa stajališta čisto demonstrativne logike. Da se plauzibilno zaključivanje učini još razumljivijim, bili bi potrebni još mnogi konkretni primjeri, razmatranje drugih vrsta heurističkih silogizama te istraživanje pojma vjerojatnosti i ostalih pojmova u vezi s ovim. Autor se nada da će to iznijeti u jednoj potpunijoj obradi teme.]

Heuristički su razlozi važni, iako ništa ne dokazuju. Također je važno da razjašnjavamo svoje heurističke razloge, iako se iza svakog objašnjenog razloga nalaze mnogi drugi, koji ostaju mutni, a možda su još važniji.

Znaš li neki srodni zadatak? Jedva se može zamisliti neki apsolutno nov zadatak, koji ne bi bio sličan ili srodan nekom ranije riješenom zadatku. Kad bi takav zadatak mogao postojati, on bi bio nerješiv. Svaki puta kad rješavamo neki zadatak iskorišćujemo zadatke koji su ranije riješeni, upotrebljavajući njihove rezultate, ili metode, ili iskustvo stečeno rješavanjem tih zadataka. A razumije se da zadaci, koje želimo iskoristiti moraju biti u nekoj vezi s našim danim zadatkom. Otuda pitanje: *Znaš li neki srodni zadatak?*

Obično nije nimalo teško sjetiti se riješenih zadataka koji su više-manje povezani s postavljenim zadatkom. Naprotiv: mogli bismo naći previše takvih zadataka, pa bi bilo teško među njima izabrati koristan. Valja potražiti zadatke koji su uže povezani. Stoga: PROMOTRI NEPOZNANICU ili potraži neki zadatak koji je ranije riješen, a s danim ga zadatkom povezuje GENERALIZACIJA, SPECIJALIZACIJA ili ANALOGIJA.

Pitanje koje u ovom članku razmatramo usmjereno je k mobilizaciji našeg ranije stečenog znanja (NAPREDAK I DOSTIGNUĆE, 1). Jedan bitan dio našeg matematičkog znanja sakupljen je u obliku ranije dokazanih teorema. Otuda pitanje: *Znaš li koji teorem koji bi ti mogao pomoći?* Ovo će pitanje biti osobito prikladno kad se radi o »dokaznom zadatku«, tj. kada moramo ili dokazati ili opovrgnuti neki postavljeni teorem.

Izdavačko poduzeće »Školska knjiga«
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
Ante Marin

Tehnički redaktor
Stanislav Maček

Korektor
Ante Gavranović

Štampanje završeno u lipnju 1966.
»Vjesnik«, Zagreb