Vežbe iz Matematike 2

Smer: diplomirani učitelj & diplomirani vaspitač

Snežana Gordić
Pedagoški fakultet u Somboru

Zimski semestar 2021/2022

Literatura

[1] A. Petojević, *Matematika*, Pedagoški fakultet u Somboru, Sombor, 2014.

[2] Lj. Oparnica, *Kombinatorika i verovatnoća. Teorija, primeri i zadaci*, Univerzitet u Novom Sadu, Pedagoški fakultet u Somboru, Sombor, 2014.

[3] Lj. Oparnica, M. Zobenica, S. Gordić *Zbirka zadataka iz kombinatorike i verovatnoće*, Univerzitet u Novom Sadu, Pedagoški fakultet u Somboru, Sombor, 2017.

Predispitni bodovi

- **Vežbe.** 5 bodova se dobija za prisustvo vežbama i/ili urađene zadatke za samostalan rad (uredno ispisani i predati do kraja zimskog semestra). Bodovi se upisuju u indeks na poslednjim vežbama.
- **Kolokvijum 1.** Sastoji se iz dva zadatka i može se dobiti maksimalno 15 bodova. Zadaci su iz kombinatorike.
- **Kolokvijum 2.** Sastoji se iz dva zadatka i može se dobiti maksimalno 20 bodova (svaki zadatak po 10 bodova). Prvi zadatak je iz verovatnoće, a drugi zadatak je iz geometrije.

Na **kolokvijum** obavezno poneti **INDEKS**! Na kolokvijumu i ispitu je dozvoljena upotreba udžbenika [1].

Konsultacije

- Utorak $15^{30} - 17^{30}$
- Za dodatne termine ili online konsultacije poslati e-mail.

Kontakt

- **Kabinet:** 44
- **e-mail:** gordicsnezana@gmail.com ili snezana.gordic@pef.uns.ac.rs

---

1 Kombinatorika: faktorijel, binomni koeficijent, princip proizvoda i zbira

Datum: 18.10.2021./22.10.2021.

- **Faktorijel** $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad n \in \mathbb{N}_0$
- **Binomni koeficijent** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \ k \leq n$
- **Princip proizvoda**
  - Ako se određeni izbor sastoji iz dva koraka, i pri tome u prvom koraku imamo m mogućnosti izbora, a u drugom l mogućnosti izbora, onda je broj mogućih konačnih izbora jednak $m \cdot l$.
  - Ako se određeni izbor sastoji iz n koraka i pri tome u prvom koraku imamo m_1 mogućnosti izbora, u drugom m_2 mogućnosti izbora, i tako dalje, u k-tom koraku imamo m_k mogućnosti izbora, za svako $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, onda je broj mogućih konačnih izbora jednak $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{n-1} \cdot m_n$.
- **Princip zbira**
  - Ako se objekat A može izabrati na m načina, a objekat B na l načina, onda se jedan od objekata A ili B može izabrati na $m + l$ načina.
  - Ako se objekat A_1 može odabrati na m_1 načina, objekat A_2 na m_2 načina, i tako dalje, objekat A_k se može odabrati na m_k načina, za svako $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, tada se jedan od objekata A_1 ili A_2 ili A_3 ili ... ili A_n može odabrati na $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ načina.

1. Izračunati: a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4!$ b) $4 \cdot 0! + 3 \cdot 1! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 4!$.
2. Skratiti razlomke: a) $\frac{20!}{18!}$; b) $\frac{100!}{102!}$; c) $\frac{n!}{(n-1)!}$; d) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$ e) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$.
3. Izračunati: a) $7!(\frac{6!}{8!} + \frac{4!}{6!}) - 8!(\frac{7!}{9!} - \frac{4!}{7!})$; b) $-7!(\frac{3!}{6!} - \frac{7!}{9!})$; c) $5! : (0! + 1! + 2!) + \frac{6! - 5!}{120}$.
4. Rešiti sledeće jednačine u skupu prirodnih brojeva: a) $\frac{x!}{(x-1)!} = 9$; b) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 132$; c) $\frac{n!}{(n+1)! - n!} = \frac{1}{9}$.
5. Rešiti nejednačinu u skupu prirodnih brojeva: $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$.
6. Izračunati: a) $\binom{5}{0}$; b) $\binom{5}{1}$; c) $\binom{5}{2}$; d) $\binom{5}{3}$; e) $\binom{5}{4}$; f) $\binom{5}{5}$.
7. Izračunati: a) $\binom{6}{2}$; b) $\binom{7}{3}$; c) $\binom{10}{3} - \binom{10}{7}$; d) $\binom{n}{0}$; e) $\binom{n}{1}$; f) $\binom{n}{n}$.
8. Rešiti jednačinu po $n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} - 8\binom{n}{1} = 0$.
9. Rešiti nejednačinu u skupu prirodnih brojeva: $\binom{13}{x} > \binom{13}{x+2}$.
10. Dragana ima 3 haljine, 4 suknje i 5 košulja. Na koliko različitih načina Dragana može da se obuče za svoj prvi radni dan (sve suknje i košulje se međusobno slažu)?
11. Da bi se stiglo od mesta A do mesta D može se proći kroz mesto B ili kroz mesto C. Od mesta A do B vode tri direktna puta, od A do C - četiri, od B do C - tri, od B do D - dva i od C do D - tri direktna puta. Koliko ima mogućih puteva od A do D?
12. Sara putuje iz Novog Sada u Budimpeštu. Postoji mogućnost da ide auto-putem preko Subotice ili magistralnim putevima preko Sombora. Od Novog Sada do Sombora može stići na četiri različita načina, a od Sombora do Budimpešte na dva različita načina. Na koliko različitih načina Sara može da stigne na svoje odredište?
13. Potencijalni kupac auta može da bira da li će odmah sve isplatiti u kešu ili će otplaćivati preko kredita. Ukoliko otplaćuje preko kredita može da bira između fiksne i promenljive kamatne stope, a takođe može da bira period otplate od 12, 36 ili 60 meseci. Koliko postoji mogućih ishoda da kupac plati auto?

14. Školska kreda se proizvodi u 3 različite dužine, 8 različitih boja i 4 različita prečnika. Koliko različitih vrsta krede se proizvodi?

15. U amfiteatru se nalazi 120 studenata, 3 asistenta i 2 profesora. Na koliko načina se iz tog amfiteatra može odabrati

    a) jedna osoba,

    b) jedan student, jedan asistent i jedan profesor?

16. Gost u hotelu za doručak može da izabere kafu, čaj ili mleko. Koliko ima načina za izbor, ako ostaje u hotelu sedam dana?

17. Darija želi da ruča u restoranu i konobar je obaveštava da ima dve mogućnosti za predjelo: supu ili salatu, tri mogućnosti za glavno jelo: meso, ribu ili vegetarijansko jelo, dve mogućnosti za dezert: sladoled ili kolač. Na koliko načina Darija može da kompletira svoj meni?

18. Lidija radi u knjižari. Šef joj je rekao da izabere po jednu knjigu iz svakog od 5 žanrova za izlog knjižare. Lidija ima na raspolaganju 4 naučno fantastične knjige, 3 istorijske, 5 knjiga iz klasične književnosti, 6 enciklopedija i 3 dečije knjige. Na koliko različitih načina Lidija može da izabere knjige za izlog?

Zadaci za samostalan rad

1. Rešiti nejednačinu u skupu prirodnih brojeva: $\binom{18}{x-2} > \binom{18}{x}$.

2. U kupeu jednog voza nalaze se dve klupe, okrenute jedna prema drugoj sa po pet mesta. Od dest putnika, četiri putnika želi da sedi u smeru kretanja voza, troje u suprotnom smeru, a preostalima je svejedno. Na koliko načina se putnici mogu rasporediti na mesta u kupeu?

2 Kombinatorika: permutacije, varijacije i kombinacije bez ponavljanja

Datum: 25.10.2021./29.10.2021.

1. Napisati sve permutacije: a) cifara $1, 2, 3, 4$; b) slova a, b, c.
2. Ukoliko učenici sutra imaju četiri časa: srpski jezik, fizičko vaspitanje, muzičku i likovnu kulturu, na koliko različitih načina se može napraviti raspored časova, tako da muzička kultura bude poslednji čas?
3. Napisati sve permutacije od cifara $3, 4, 5, 6, 7$, koje imaju 6 na prvom, a 4 na poslednjem mestu.
4. Napisati sve moguće rasporede da Ana, Bilja, Vera i Goca stanu u red za kasu.
5. Napisati sve moguće rasporede da Ana, Bilja, Vera i Goca sednu za okrugli sto.
6. Na koliko različitih načina se može smestiti sedmoro dece na klupu? A na koliko ako u sredini mora da sedi najstarije dete?
7. Koliko permutacija od cifara $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ počinje sa: a) 5, b) 123, c) 8642?
8. U koliko različitih permutacija od elemenata $1, 2, 3, 4, 5$ se cifre 1 i 5 nalaze jedna pored druge:
   a) u nekom zadatom poretku? b) u proizvoljnom poretku?
9. Na koliko načina se u niz mogu poređati cifre $1, 2, 3, ..., 9$ tako da se na prva četiri mesta nađu parne cifre?
10. Dat je skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
    a) Koliko se različitih šestocifrenih brojeva može formirati od elemenata skupa S tako da se u njima cifre ne ponavljaju?
    b) Koliko je od toga parnih brojeva?
11. Koja je po leksikografskom redu permutacija $KRUG$?
12. Dat je skup $S = \{2, 4, 5, 8\}$.
    a) Napisati i prebrojati sve varijacije klase 2 od elemenata skupa S bez ponavljanja.
    b) Napisati i prebrojati sve varijacije bez ponavljanja klase 3 od elemenata skupa S.
13. Koliko ima dvocifrenih, a koliko trocifrenih brojeva od cifara $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ čije su sve cifre: a) iste, b) različite,
14. Koliko se trocifrenih brojeva može formirati od elemenata skupa $S = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ tako da im se cifre ne ponavljaju? Koliko je njih deljivo sa 25?
15. Broj varijacija bez ponavljanja druge klase od n elemenata je 90. Naći n.
16. Koja je po redu varijacija SAT među varijacijama (bez ponavljanja) klase tri od slova A, U, B, S, T?
17. Na koliko načina se mogu izabrati četiri osobe, na četiri različite funkcije od devet kandidata?
18. U jednoj kutiji se nalazi šest loptica označenih sa $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Napisati sve moguće kombinacije da se istovremeno izvuku: a) dve loptice, b) tri loptice, c) pet loptica.
19. Prebrojati i napisati sve kombinacije bez ponavljanja sa tri člana, čiji su elementi samoglasnici. Koja je po redu kombinacija eio?
20. Na koliko načina se od šest lica mogu izabrati tri?
21. Koliko ima kombinacija u igri loto (od 39 brojeva se izvlači 7 brojeva)?
22. Na šahovskom turniru učestvuje 12 takmičara. Svaki od njih treba da odigra sa svima ostalima po jednu partiju. Koliko će se partija odigrati na turniru?
23. Iz špila od 52 karte treba izvući 4 karte odjednom. Na koliko različitih načina je moguće izvršiti izbor?
24. Iz grupe od 9 muškaraca i 5 žena treba odabrati 7 osoba tako da među njima budu bar 3 žene. Na koliko se načina to može učiniti?
25. U odeljenju ima 12 dečaka i 15 devojčica. Na koliko načina se mogu izabrati 4 učenika da predstavljaju razred na školskom kvizu? Na koliko načina je to moguće učiniti ako se traži da 2 učenika budu dečaci, a 2 devojčice?

Zadaci za samostalan rad

1. Dat je skup $S = \{1, 3, 5, 7\}$. Napisati sve permutacije bez ponavljanja, sve varijacije bez ponavljanja klase 2 i sve kombinacije bez ponavljanja klase 3 od elemenata skupa S.

3 Kombinatorika: permutacije, varijacije i kombinacije sa ponavljanjem

Datum: 1.11.2021./5.11.2021.

1. Napisati sve permutacije od elemenata $1, 2, 3, 3$ po leksikografskom poretku.

2. Jedan automat za slatkiše sadrži 3 vrste čokolada i od svake vrste po 10. Na koliko načina se može isprazniti automat?

3. U rasporedu časova za sredu treba da se nađu po jedan čas iz srpskog jezika (S) i matematike (M) i po dva časa prirode i društva (P) i fizičkog vaspitanja (F).

   a) Na koliko načina se može napraviti raspored za sredu?

   b) Na koliko načina se može napraviti raspored ako želimo da dva časa fizičkog budu spojena? Zapišite sve takve rasporede kod kojih je matematika prvi čas.

4. Koliko ima petocifrenih brojeva koji se sastoje od cifara $3, 3, 5, 7, 7$?

5. Odrediti 15. permutaciju od elemenata $1, 1, 1, 2, 2, 2, 2$.

6. Dat je skup $S = \{2, 4, 5, 8\}$. Napisati i prebrojati sve varijacije klase 2 od elemenata skupa S sa ponavljanjem.

7. Koliko ima dvocifrenih, a koliko trocifrenih brojeva od cifara $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ čije cifre mogu da budu iste?

8. Koliko različitih izbora postoji da se iz kompleta koji sadrži 32 karte izvuče, jedna po jedna, 5 karata:

   a) sa vraćanjem, ako je redosled bitan;

   b) bez vraćanja, ako je redosled bitan?

9. Na koliko načina može biti ocenjen student na kraju školske godine iz 9 predmeta ako

   a) iz svih predmeta može dobiti ocenu od 5 do 10?

   b) iz dva predmeta ne može dobiti ocenu višu od 6, a iz tri predmeta nižu od 8?

10. Koliko ima šestocifrenih brojeva od cifara iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$?

11. Formirati sve varijacije sa ponavljanjem klase 3 od elemenata skupa $\{a, b, c, d\}$ Kako glasi 41. varijacija?

12. Data su slova P, F. Napisati sve kombinacije sa ponavljanjem: a) druge klase b) treće klase.

13. Date su cifre $4, 6, 8$. Napisati sve kombinacije sa ponavljanjem: a) druge klase b) treće klase.

14. Gradska poslastičarnica ima u ponudi 5 vrsta sladoleda. To su: vanila, jagoda, čokolada,limun i punč. Darija želi da uzme tri kugle. Na koliko načina Darija može da odabere svoje tri kugle?

15. Neka je E skup od 26 slova engleske abecede. Koliko različitih reči dužine 5 se može sastaviti od ovih 26 slova, ako se zahteva da prvo i peto slovo budu različiti samoglasnici (a, e, i, o, u), dok su ostala tri slova bilo koji (ne nužno različiti) suglasnici?

16. Telefonski broj u Somboru može biti petocifren ili šestocifren i ne sme početi ciframa 0, 1 i 9. Koliko različitih telefonskih brojeva može biti u Somboru?

17. Koliko ima sedmocifrenih brojeva čije su cifre $2, 2, 5, 5, 5, 6, 6$?

18. Koliko ima sedmocifrenih brojeva sastavljenih od cifara $0, 0, 0, 0, 7, 8, 9$?

Zadaci za samostalan rad

1. Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji se sastoje od cifara $1, 1, 2, 3$? Napisati ih.

2. Koliko ima trocifrenih brojeva od cifara $1, 3, 5, 7, 9$?

3. Data su slova P, E, F. Napisati sve kombinacije sa ponavljanjem klase 2.

4 Kombinatorika: binomna formula. Verovatnoća

Datum: 8.11.2021./12.11.2021.

1. Razviti po binomnoj formuli: a) $(x+y)^5$, b) $(2x-5y)^4$, c) $(x-2x^2)^6$, d) $(1-x)^3$, e) $(1-2x)^4$.
2. Navesti skup elementarnih događaja za sledeće eksperimente:
   a) bacanje novčića,
   b) bacanje novčića dva puta,
   c) bacanje novčića tri puta,
   d) bacanje kockice za igru i novčića,
   e) bacanje dva puta kockice za igru,
   f) izvlačenje jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
   g) izvlačenje dve kuglice (izvlačimo ih jednu po jednu) iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
   h) izvlačenje dve kuglice odjednom iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
   i) polaganje testa,
   j) registrovanje ispravnosti tri sijalice.
3. U jednoj kutiji se nalaze tri predmeta obeležena sa A, B i C. Slučajno su izabrana dva. Navedite sve moguće ishode.
4. Dva igrača igraju dve partije šaha. U svakoj partiji moguća su tri ishoda: pobeda prvog igrača, remi ili pobeda drugog igrača. Odrediti skup elementarnih događaja.
5. Kockica za igru se baca jedan put. Ako je pao broj manji od tri, kockica se baca još jedan put. Odrediti skup elementarnih događaja.
6. Novčić se baca do prve pojave grba, a najviše četiri puta. Odrediti skup elementarnih događaja i događaj A da je izveden neparan broj bacanja.
7. Umetnik je izradio četiri predmeta X, Y, P i Q od kojih njegov menadžer bira dva za izložbu. Izraziti skup svih mogućih ishoda ovog izbora, a zatim odredi sledeće događaje: $A-$ izabran je predmet X, $B-$ nije izabran predmet P, $C-$ izabran je X, a nije P.
8. Neka se eksperiment sastoji u istovremenom bacanju kockice i biranju dva predmeta od tri označena sa: X, Y, i Z. Neka su dati događaji: $A-$ na kocki je pala šestica, $B-$ izvučeni su predmeti X i Z, $C-$ na kocki je pao broj veći od 4. Odrediti skup elementarnih ishoda Ω i sledeće događaje: A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ i $B \cap C$.
9. Sanja, Mirela i Ilijana su upitane da li su ove godine bile na letovanju ili ne. Navedite sve moguće ishode ovog eksperimenta, a zatim odredi sledeće događaje: $A-$ Sanja je bila na letovanju; $B-$ Ilijana nije bila na letovanju; $C-$ Mirela i Ilijana su bile na letovanju; $V-$ Sanja je bila ili Ilijana nije bila na letovanju.
10. Eksperiment se sastoji od jednog bacanja kockice za igru. Posmatrajmo događaje: $A-$ dobijen je neparan broj, $B-$ dobijen je broj koji nije manji od 4, $C-$ dobijen je broj manji od 3. Napisati skup elementarnih događaja Ω. Navesti i rečima opisati elementarne događaje sastoje događaji: A, B, C, $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $\overline{A}$, $\overline{C}$. Kolike su verovatnoće događaja A,B i C?
11. Neka se eksperiment sastoji u istovremenom bacanju kocke i novčića. Ako je A događaj: "na kocki je pao paran broj", a B događaj: "na novčiću je palo pismo", odrediti događaje A i B, kao i $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ i $A \setminus B$. Odredi verovatnoću događaja A.
12. U kutiji se nalaze kuglice numerisane brojevima: $2, 3, 4, 4, 6,\ 7, 7,\ 7, 12$. Izvlačimo jedanu kuglicu iz kutije. Kolika je verovatnoća da je broj na izvučenoj kuglici a) 7; b) veći od 6; c) neparan; d) 9?
13. Hotel ima 22 sobe koje imaju pogled na plažu, a 34 sa pogledom na sportske terene. Kolika je verovatnoća da će gost dobiti sobu sa pogledom na plažu?
14. Kolika je verovatnoća da pri bacanju dve kocke zbir dobijenih brojeva bude a) 9; b) veći od 9?

Zadaci za samostalan rad

1. Razviti po binomnoj formuli: a) $(2x - y^2)^5$.
2. Anastasija je zamislila broj koji je veći od 11 i manji od 19. Odrediti verovatnoću da je zamislila prost broj.

5 Verovatnoća

Datum: 15.11.2021./19.11.2021.

1. Odrediti verovatnoću da se od slova a, r, t, u formira jedna od reči *tura* ili *ruta*.
2. Dete ima četiri pločice sa kojima se igra i na kojima pišu brojevi $2, 3, 6, 7$. Kolika je verovatnoća da u igri, slučajnim rasporedom pločica dete dobije a) broj deljiv sa 2, b) broj deljiv sa 4?
3. Odrediti verovatnoću da se od slova L, O, O, S sastavi ime glavnog grada Norveške.
4. U grupi od 35 studenata političkih nauka, njih 15 se dobrovoljno bavilo društveno korisnim radom. Odrediti verovatnoću:
   a) da se slučajno izabrani student bavio društveno korisnim radom,
   b) da su se od dva slučajno izabrana studenta oba bavila društveno korisnim radom.
5. Iz kompleta od 32 karte izvučene su 3 karte. Kolika je verovatnoća da se među izvučenim kartama nalaze:
   a) tri desetke, b) šestica, devetka i kec, c) tačno jedan kec?
6. Novčić se baca četiri puta. Odrediti verovatnoću da su
   a) pala tri grba, b) pala bar tri grba, c) palo je jedno pismo, d) nije pao ni jedan grb.
7. Na testu za pitanje ima pet ponuđenih odgovora. Ako Milica izabere jedan odgovor na osnovu "čistog nagađanja", kolika je verovatnoća da njen odgovor bude: a) tačan, b) netačan. Koliki je zbir ovih verovatnoća? Zašto?
8. Verovatnoća da su slučajno izabranom studentu ostala nepoložena dva ili više ispita je 0.66. Koji je suprotan događaj? Kolika je verovatnoća tog suprotnog događaja?
9. Verovatnoća da porodica ima veš mašinu je 0.68, da ima DVD plejer 0.81, a da ima i veš mašinu i DVD plejer je 0.58. Kolika je verovatnoća da slučajno izabrana porodica ima veš mašinu ili DVD plejer?
10. Iz kutije u kojoj se nalaze crne, bele, plave, žute i zelene kuglice izvlači se na slučajan način jedna kuglica. Ako je verovatnoća da će biti izvučena crna kuglica $\frac{1}{5}$, a verovatnoća da će biti izvučena bela kuglica $\frac{2}{5}$, kolika je verovatnoća da će biti izvučena ili plava ili žuta ili zelena kuglica?
11. Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Kolika je verovatnoća da je izvučena karta dama ili kralj?
12. Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Kolika je verovatnoća da je izvučena karta dama ili pik?
13. Iz špila od 32 karte izvlače se dve karte odjednom. Kolika je verovatnoća da su izvučene karte dva keca ili karte iste boje?
14. Iz špila od 32 karte izvlačimo dve odjednom. Kolika je verovatnoća da ćemo izvući kralja i keca ili karte pik i tref ili obe karte karo?
15. Učenik učestvuje na takmičenju iz matematike, nacrtne geometrije i fizike. Verovatnoća da osvoji nagradu za svaki predmet iznosi 0.4. Kolika je verovatnoća da će učenik osvojiti nagradu iz bar jednog predmeta?
16. Od svih učenika koji su polagali popravni ispit iz matematike i stranog jezika u jednoj školi, 10% nije položilo matematiku, 12% nije položilo strani jezik, 2% nijedno ni drugo. Ako na slučajno odaberemo jednog učenika, da li su događaji: A - nije položio matematiku i B - nije položio strani jezik, nezavisni?
17. Iz špila od 32 karte slučajno se izvlači jedna karta. Kolika je verovatnoća da je izvučena karta
   a) tref, ako se zna da nije herc?
   b) tref, ako se zna da je izvučena dama?
   c) dama, ako se zna da je izvučen tref?
   d) tref, ako se zna da je izvučena crna karta?
   e) crna, ako se zna da je izvučen tref?
18. Neka je $P(A|B) = 0.6$, $P(B|A) = 0.4$ i $P(B) = 0.35$. Naći: $P(A)$, $P(A\bar{B})$ i $P(\bar{B}|A)$.

Zadaci za samostalan rad

1. Neka je $P(A|B) = 0.4$, $P(B|A) = 0.25$ i $P(B) = 0.45$. Naći: $P(A)$, $P(A\bar{B})$ i $P(\bar{B}|A)$.

6 I kolokvijum

Datum: 22.11.2021./26.11.2021.

7 Geometrija

Datum: 29.11.2021./3.12.2021.

1. Na pravoj a date su tačke A, B, C, D tako da je $A-B-C$ i $B-C-D$. Odrediti: $[AC]\cap[BD]$, $[AB]\cup[BD]$, $[AB]\cap[BC]$, $(AB)\cap(BC)$, $[AD]\setminus[AB]$, $pp[BD)\cup[AC)$, $p(BD)\cap(AC)$.
2. (a) U ravni je dato 7 različitih tačaka, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Koliko pravih određuju ove tačke?
   (b) Koliko najmanje, a koliko najviše ravni određuje 5 različitih tačaka?
3. Koliko je najmanje tačaka potrebno u ravni da bi njima bilo određeno a) 3 prave, b) 15 pravih, c) 55 pravih?
4. Koliko tačaka sadrži skup od n tačaka, ako je najveći broj pravih određenih sa n tačaka tri puta veći od broja tačaka?
5. Koliko tačaka ima skup od n tačaka ako je najveći broj ravni određenih sa n tačaka 12 puta veći od najvećeg broja pravih koje mogu biti određene tim tačkama?
6. Neka su a, b, c, d četiri paralelne prave, među kojima nikoje tri ne pripadaju jednoj ravni. Koliko ravni određuju ove prave?
7. Koliko najviše ravni određuju tri paralelne prave x, y, z i tri tačke A, B, C? Koje su to ravni?
8. (a) Na pravoj s date su tačke P, Q, R, S tako da je $P-Q-R$ i $Q-R-S$. Odrediti:
      i. poluprave sa početnom tačkom R;
      ii. $[QS]\cap[PR)$, $s\setminus pp[RS)$, $pp[QS)\cup(PS]$.
   (b) Koliko najviše ravni određuju mimoilazne prave a i b i tačke P, Q, R? Koje su to ravni?
9. Date su prave $p(A, B)$ i $p(C, D)$ koje se seku u tački O.
   (a) Nabroj sve:
      i. poluprave sa početnom tačkom O,
      ii. trouglove određene tačkama A, B, C, D, O.
   (b) Odrediti: $(BO)\cap(OA]$, $(BO]\cup[AB)$, $[BO]\cup p(A, O)$.
10. Koja od svojstava refleksivnost, simetrija, antisimetrija i tranzitivnost ima relacija "mimoilaznost pravih"?
11. Skicirati kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Odrediti u kakvom su međusobnom položaju
    (a) tačka B i ravan određena tačkama A, D i C_1.
    (b) prava BD_1 i prava B_1C_1.
    (c) ravan određena pravom D_1B_1 i tačkom D i prava AC.
12. Prave a i b su mimoilazne, a prava c seče pravu a. U kakvom međusobnom položaju mogu biti prave b i c? Skicirati sve mogućnosti.
13. Tačna tvrđenja zaokruži, a netačna precrtaj.
    (a) Postoji prava c paralelna sa dve mimoilazne prave a i b.
    (b) Svake dve prave koje su paralelne jednoj ravni paralelne su i među sobom.
    (c) Svake dve ravni koje su paralelne jednoj pravoj paralelne su i među sobom.

Zadaci za samostalan rad

1. Skicirati kvadar $ABCDEFGH$ i obojiti ravan $\alpha(A, H, G)$. Ispitaj u kakvom su međusobnom položaju:
   (a) $p(E, F,)$ i ravan α,
   (b) $q(B, H)$ i ravan α,
   (c) prave p i q.

8 Geometrija

Datum: 6.12.2021./10.12.2021.

- Zbir unutrašnjih uglova n - tougla je $S_n = 180° \cdot (n-2)$.
- Zbir spoljašnjih uglova n - tougla je $360°$.
- Unutrašnji ugao pravilnog n -tougla je $\alpha_n = \dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$.
- Spoljašnji ugao pravilnog n -tougla je $\beta_n = \dfrac{360°}{n}$.
- Broj dijagonala iz jednog temena n - tougla je $d_n = n - 3$.
- Broj svih dijagonala n - tougla je $D_n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$.

1. Naći ugao između simetrala dva naporedna ugla.
2. Razlika dva naporedna ugla je prav ugao. Izračunati uglove.
3. Naći svaki od dva suplementna ugla, ako je jedan od njih:
   a) 1.5 puta veći od drugog
   b) za $46°$ manji od drugog.
4. Da li je moguće da razlika dva ugla bude jednaka pravom uglu, ako su:
   a) oba ugla oštra;
   b) jedan ugao oštar, drugi je tup;
   c) uglovi suplementni;
   d) oba ugla tupa?

   Ako je ovo moguće, koliko takvih parova uglova ima?
5. Odrediti ugao koji je od svog komplementnog ugla veći za 1^o.
6. Uglovi α i β su komplementni sa dva suplementna ugla φ i θ. Izračunati uglove $\alpha, \beta, \varphi, \theta$.
7. Uglovi α i β su suplementni, a pet šestina ugla α i trećina ugla β su komplementni uglovi. Odrediti uglove α i β.
8. Jedan od osam uglova, koji je nastao, kada su dve paralelne prave presečene trećom jednak je 54^o. Naći ostalih sedam uglova.
9. Zbir uglova α i β sa međusobno paralelnim kracima je $82^o30'$. Izračunaj ugao suplementan uglu β.
10. Prave a, b i c se seku u tački O i prava b je normalna na pravu a. Prava d je paralelna sa pravom a i seče pravu b u tački B i pravu c u tački C. Ako je jedan od uglova koji grade prave a i c jednak $20^o16'$, odrediti uglove $\angle bBd$, $\angle cCd$, $\angle COB$.
11. Postoji li pravilni mnogougao čiji je unutrašnji ugao jednak: a) $144°$; b) $128°$?
12. Koliko stranica ima mnogougao koji ima 65 dijagonala?
13. Jedan ugao pravilnog n-tougla je $135°$. Izračunaj zbir svih uglova tog n-tougla.
14. Ako je zbir svih uglova mnogougla 2.5 puta veći od zbira svih njegovih spoljašnjih uglova, izračunaj broj svih njegovih dijagonala.
15. Ako se broj stranica jednog mnogougla smanji za 1, broj njegovih dijagonala se smanji za 8. Koji je to mnogougao?
16. Koji mnogougao ima unutrašnji ugao tri puta veći od svog spoljašnjeg?

Zadaci za samostalan rad

1. Ako je jedan od četiri ugla koje obrazuju dve prave, koje se seku, jednak polovini pravog ugla, koliki su ostali uglovi?
2. Ako se broj stranica pravilnog mnogougla smanji za 3 onda se broj njegovih dijagonala smanji za 30. Koliko se dijagonala može nacrtati iz njegova dva nesusedna temena?

9 Geometrija

Datum: 13.12.2021./17.12.2021.

Neka su a, b, c stranice ΔABC, h_a, h_b, h_c odgovarajuće visine trougla ΔABC, a α, β, γ odgovarajući uglovi ΔABC.

- Zbir unutrašnjih uglova u trouglu ΔABC: $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
- Naspram jednakih stranica trougla nalaze se jednaki uglovi. Obrnuto, naspram jednakih uglova trougla nalaze se jednake stranice.
- Naspram veće stranice trougla nalazi se veći ugao. Obrnuto, naspram većeg ugla nalazi se veća stranica.
- Svaka stranica trougla manja je od zbira druge dve stranice, a veća od njihove razlike.
- Značajne tačke trougla: centar opisanog kruga (presek simetrala stranica), centar upisanog kruga (presek simetrala unutrašnjih uglova), težište (presek težišnih duži), ortocentar (presek visina)
- Obim $\Delta ABC : \mathcal{O} = a + b + c$.
- Površina $\Delta ABC : P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$.
- Još neke formule za računanje površine ΔABC:

  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (Heronov obrazac)

  $P = \frac{abc}{4R}$ (R -poluprečnik opisanog kruga trougla)

  $P = rs$ (r poluprečnik upisanog kruga u trougao)
- Površina jednakostraničnog trougla ABC: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- **Pitagorina teorema**. Kvadrat nad hipotenuzom c jednak je zbiru kvadrata nad katetama a i b pravouglog trougla.
- Pravouganik: $P = ab$; $O = 2a + 2b$ (a i b su stranice pravougaonika)
- Kvadrat: $P = a^2 = \frac{d^2}{2}$; $O = 4a$ (a - stranica, d - dijagonala kvadrata)
- Paralelogram: $P = ah_a = bh_b$; $O = 2a + 2b$ (a i b - stranice, h_a, h_b - odgovarajuće visine paralelograma)
- Romb: $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$; $O = 4a$ (a - stranica, h - visina, d_1, d_2 - dijagonale romba)
- Trapez: $P = \frac{a+c}{2}h$; $O = a + b + c + d$ (a i c - osnovice, b, d - kraci, h - visina trapeza)
- Deltoid: $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ (d_1, d_2 - dijagonale deltoida)
- Ugao čije teme pripada kružnoj liniji k, a kraci su tetive tog kruga, zove se *periferijski ugao* kružne linije k. Ugao čije je teme centar kružne linije zove se *centralni ugao.*
- Centralni ugao je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla;
- Svi periferijski uglovi nad istim lukom neke kružne linije jednaki su ili suplementni;
- Periferijski ugao nad prečnikom je prav;
- Trougao čija je jedna stranica prečnik opisanog kruga je pravougli.
- *Tetivni četvorougao* je četvorougao oko kojeg se može opisati krug. Naspramni uglovi kod tetivnog četvorougla su suplementni, tj. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^o$.
- *Tangentni četvorougao* je četvorougao u koji se može upisati krug. Kod tangentnog četvorougla $ABCD$ zbir naspamnih stranica je jednak, tj. $AB + CD = AD + BC$.
- Obim: $\mathcal{O} = 2r\pi$; , Površina $P = r^2\pi$

1. Uporediti uglove trougla čije su stranice $a = 2\,cm$, $b = 5\,cm$, $c = 5\,cm$.
2. Da li postoji trougao čije su stranice $2\,cm$, $3\,cm$ i $5\,cm$?

3. U datom trouglu razlika stranica a i b ne prelazi 2, a zbir stranica b i c ne prelazi 5. Dokazati da je stranica b kraća od 7.

4. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trougla ako je dužina kraka $b = 15\,cm$ a dužina visine koja odgovara osnovici, $h_a = 9\,cm$.

5. Izračunati visinu koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla čiji je obim 32, a osnovica 12.

6. Izračunati obim i površinu jednakostraničnog trougla ako je njegova visina $h = 4\sqrt{3}$.

7. Izračunati stranicu i visinu jednakostraničnog trougla površine $16\sqrt{3}$.

8. Izračunati površinu pravouglog trougla čija je jedna kateta $a = 9$ i hipotenuza $c = 15$.

9. Dat je jednakokraki trougao čija je osnovica $a = 8\,cm$ i visina na osnovicu $h_a = 3\,cm$. Izračunati odgovarajuću visinu na krak h_b?

10. Ako su $\alpha = 52^\circ$ i $\beta = 68^\circ$ unutrašnji uglovi nekog trougla, izračunati uglove koje obrazuju simetrale unutrašnjih uglova.

11. Neka je ABC jednakokraki trougao sa osnovicom AB i neka je AD simetrala $\angle BAC$. Izračunati uglove u trouglu ABC ako je $\angle ADB = 60^\circ$.

12. U pravouglom trouglu ugao između visine i težišne duži koja odgovara hipotenuzi je 10°. Koliki su oštri uglovi ovog trougla?

13. Izračunaj obim jednakokrakog pravouglog trougla čija je hipotenuza 12 cm.

14. Izračunati hipotenuzu pravouglog trougla ako je data njegova površina $P = 270\ cm^2$ i odnos kateta $a : b = 5 : 3$.

15. Katete pravouglog trougla su 6 i 8. Izračunati visinu koja odgovara hipotenuzi.

16. Izračunati obim i površinu kvadrata dijagonale $3\sqrt{2}$.

17. Izračunati površinu pravougaonika čija je stranica $a = 5$, a dijagonala $d = 13$.

18. Stranice paralelograma su $a = 5$, $b = 7$, a povrina 70. Izračunati visine koje odgovaraju stranicama a i b.

19. Dva ugla trapeza iznose $68^\circ 15'$ i $102^\circ 28'$. Izračunaj ostale unutrašnje uglove trapeza.

20. Odrediti dužinu manje osnovice jednakokrakog trapeza, ako je ona jednaka bočnoj stranici, obim trapeza je 28, a srednja duž (duž koja spaja sredine bočnih stranica) 9.

21. Stranice paralelograma su 12 cm i 8 cm. Rastojanje između (kraćih) paralelnih stranica je 6cm. Koliko je rastojanje između druge dve paralelne stranice?

22. Površina romba je 70 cm^2, a visina 5 cm. Izračunati obim tog romba.

23. Stranice pravougaonika razlikuju se za 6. Ako veću umanjimo za 2, a manju uvećamo za 5, površina pravougaonika će biti veća za 32. Odrediti stranice početnog pravougaonika.

24. Tepih dužine 6 m, a širine 3 m treba porubiti ukrasnom trakom. Koliko je konca potrebno za porubljivanje celog tepiha, ako se 1 m tepiha ukrasi sa 4 m konca?

25. Pravougaonik i kvadrat imaju jednake obime. Stranice pravougaonika su 14cm i 6cm. Kolika je površina kvadrata i za koliko je veća od površine pravougaonika?

26. Ako se jedna stranica datog kvadrata produži za 8cm, a druga smanji za 6cm, tada se dobije pravougaonik čija je površina jednaka površini datog kvadrata. Odrediti obim kvadrata i pravougaonika.

27. Igralište ima oblik pravougaonika dužine 60 m i širine 50 m. Oko njega je staza širine 120 cm. Izračunati površinu staze.

28. Nad stranicama kvadrata stranice $a = 10cm$ (sa spoljašnje strane kvadrata) su konstruisani jednakostranični trouglovi. Odrediti obim i površinu tako dobijene figure.

29. Obim opisane kružnice kvadrata je $8\pi cm$. Izračunati obim kvadrata.

30. Obimi koncentričnih kružnica su $O_1 = 16\pi\ cm$ i $O_2 = 10\pi\ cm$. Kolika je površina odgovarajućeg kružnog prstena?

31. Izračunati površinu i poluprečnik upisanog kruga romba, ako je: $d_1 = 24$ i $d_2 = 10$.

32. Izračunaj obim kruga čiji je poluprečnik $4\,cm$.

Zadaci za samostalan rad

1. Izračunati dijagonalu kvadrata čija je površina 20.

2. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trougla ako je dužina kraka $b = 15\,cm$, a visina koja odgovara kraku dužine $h_b = 12\,cm$.

3. Izračunati površinu kruga upisanog u kvadrat stranice $8\,cm$

4. Površina poda učionice je 72 m^2, a školskog igrališta 2 a. Za koliko je površina igrališta veća od površine učionice?

5. Izračunaj površinu kruga čiji je obim $14\,cm$.

6. Izračunati površinu kruga opisanog oko kvadrata čiji je obim $24\,cm$.

7. U romb visine $6\,cm$ upisan je krug. Odredi obim i površinu kruga.

8. Pravougaonik od papira je presečen na dva jednaka dela. Svaki od tih delova je kvadrat obima 5 dm 2 cm. Odredi obim početnog pravougaonika.

9. Kvadrat je sa dve prave podeljen na dva kvadrata i dva pravougaonika. Obim jednog od dobijenih kvadrata je 20 cm, a obim jednog pravougaonika 30 cm. Izračunaj obim početnog kvadrata.

10. U jednakokrakom trouglu ABC ($AC = BC$) simetrala ugla na osnovici i simetrala ugla pri vrhu seku se u tački S tako da je $\angle ASC = 110°$. Odrediti uglove trougla ABC.

10 II kolokvijum

Datum: 20.12.2021./24.12.2021.

11 Geometrija

Datum: 10.1.2021./14.1.2021.

Valjak, Prizma: $P = 2B + M$; $V = B \cdot H$

Kocka: $P = 6a^2$; $V = a^3$ (a - ivica kocke)

Kvadar: $P = abc$; $V = 2(ab + ac + bc)$ (a, b, c - ivice kvadra)

Piramida, Kupa: $P = B + M$; $V = \frac{1}{3} B \cdot H$

Lopta: $P = 4\,\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\,\pi R^3$

(M - omotač; B - baza; H - visina; P - površina; V - zapremina; R - poluprečnik lopte)

1. Zbir dužina ivica kocke je 18 cm. Izračunaj njenu površinu.
2. Bazen oblika kvadra dimenzija $40\,m$, $30\,m$ i 2 m treba popločati keramičkim pločicama čije su dimenizije $10\,cm$ i 20 cm. Koliko pločica je potrebno?
3. Dve ivice kvadra su 14 cm i 8 cm, a zapremina je 2912 cm^3. Izračunati površinu kvadra.
4. Zapremina prave pravilne šestostrane prizme je $540\sqrt{3}\ cm^3$, a visina prizme je $10cm$. Izračunati površinu prizme.
5. Izračunati površinu i zapreminu pravog valjka ako je dat poluprečnik $r = 8cm$ i omotač $M = 240\pi cm^2$.
6. Dve ivice kvadra su 14 cm i 8 cm, a zapremina je 2912 cm^3. Izračunati površinu kvadra.
7. Zapremina prave pravilne šestostrane prizme je $540\sqrt{3}\ cm^3$, a visina prizme je $10\,cm$. Izračunati površinu prizme.
8. Izračunati površinu i zapreminu pravog valjka ako je dat poluprečnik $r = 8cm$ i omotač $M = 240\pi cm^2$.
9. Pravougaonik čija je jedna stranica $6\,cm$ i dijagonala $10\,cm$ rotira oko veće stranice. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.
10. Izračunati visinu pravilne trostrane prizme ako je osnovna ivica dužine $2\,cm$, a zapremina prizme $\sqrt{3}\,cm^3$.
11. Osnovna ivica pravilne šestostrane prizme je $6\,cm$, a dijagonala bočne strane $10\,cm$. Izračunati zapreminu prizme.
12. Osnova prizme je romb čije su dijagonale $10\,cm$ i $24\,cm$. Izračunati površinu i zapreminu prizme ako je visina prizme jednaka polovini stranice romba.
13. Treba ofarbati kutiju bez poklopca oblika kvadra, čije su dimenzije $20\,cm$, $40\,cm$ i $70\,cm$. Ako se na $5\,dm^2$ utroši $10\,g$ farbe, koliko je potrebno pripremiti farbe?
14. Osnova prizme je pravougli trougao čija je jedna kateta $9\,cm$, a druga kateta je za $3\,cm$ kraća od hipotenuze. Visina prizme je dva puta duža od kraće katete. Izračunati površinu i zapreminu prizme.
15. Obim osnog preseka valjka je $44\,cm$, a visina valjka je za $7\,cm$ veća od poluprečnika osnove. Izračunati površinu i zapreminu tog valjka.
16. Osnovna ivica prave pravilne četvorostrane piramide je $10cm$, a visina piramide je $12cm$. Izračunati površinu i zapreminu piramide.
17. Osnova piramide je romb čije su dijagonale 6 i 8, a visina piramide je 5. Izračunati zapreminu piramide.
18. Izračunati zapreminu prave kupe čiji je poluprečnik osnove $21cm$, a visina $10cm$.
19. Izračunati površinu i zapreminu lopte ako je poluprečnik lopte $4\,cm$.
20. Obim osnove kupe je $8\pi\,cm$. Ako je dužina bočne strane $5\,cm$, izračunati površinu kupe.
21. Zbir ivica jednakoivične trostrane piramide je $24\,cm$. Izračunati površinu piramide.
22. Jednakokraki pravougli trougao obrće se oko katete. Izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela ako je dužina hipotenuze trougla $9\sqrt{2}\,cm$.
23. Izvodnica prave kupe sa osnovom obrazuje ugao od 60^o. Izračunati površinu i zapreminu kupe ako je prečnik osnove $10\,cm$.
24. Izračunati zapreminu praivilne četvorostrane piramide ako su bočne strane nagnute prema osnovi pod uglom od 60°, a površina piramide je $108\,cm^2$.

Zadaci za samostalan rad

1. Ako se prečnik lopte poveća dva puta, koliko puta se poveća zapremina lopte?

2. Olovna kugla (lopta) zapremine $36\pi\, cm^3$ pretopljena je u valjak visine $9\, cm$ Izračunati odnos poluprečnika lopte i poluprečnika osnove valjka.

3. Lopta je upisana u kocku. Koji je odnos površina lopte i kocke?